Colles semaine 1.A

Sujet 1.

1. Nier l'assertion suivante : Pour tout nombre réels x ; $1 \leq x \leq 3$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$;
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
3. Donner la définition d'une application injective.
4. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$.
Étudier l'injectivité , la surjectivité et la bijectivité de f.

Sujet 2.

1. Nier l'assertion suivante : Le carré de tout nombre réel est un nombre rationnel.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$;
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
3. Donner la définition d'une application surjective.
4. Soit E un ensemble et $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ l'application définie par $f(A) = \overline{A}$.
Étudier l'injectivité la surjectivité et la bijectivité de f.

Sujet 3.

1. Tout nombre réel est majoré par un nombre rationnel.
2. Soit x un réel distinct de 1. Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 + x + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.
3. Donner la définition d'une application bijective.
4. Soient E un ensemble et , A et B deux parties de E. Montrer que :
$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times E \cup E \times \overline{B}$$