Colles semaine 10

Sujet 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{x}{n})^n = e^x$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{z}{n})^n = e^z$
3. Résoudre l'équation $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$

Sujet 2.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
2. Prouver pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) = \dfrac{\pi}{2}$
3. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$

Sujet 3.

1. On pose $\alpha = \arcsin(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$. Calculer $\cos(4\alpha)$, en déduire la valeur de α.
2. Résoudre l'équation $\arcsin(2x) = \arctan(x)$
3. Montrer que $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$

Sujet 4.

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [-1,1]$, on pose $f_n(x) = \cos(n\arccos(x))$.

1. Calculer f_0, f_1 et f_2.
2. Montrer que $f_{n+2}(x) = 2xf_n(x) - f_n(x)$, $x \in [-1,1]$.
3. En déduire que f_n est une fonction polynomiale.
4. Résoudre l'équation $f_n(x) = 0$.

Sujet 5.

On pose $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ et $g(x) = \arccos(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)})$

1. Vérifie que f et g sont définies sur $\mathbb{R}^*$ et sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = g(x)$ et
   pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $f(x) = -g(x)$.
3. Montrer que $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$.

Sujet 6.

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$\sin(\arctan x) \quad \text{et} \quad \cos(\arctan x)$$

2. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, argþ$(x) = \frac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\arcsin(\tan(x)) = x$

Sujet 7.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \operatorname{argch}(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)+1}{2}}) - \dfrac{|x|}{2}$

1. Vérifier que f est impaire.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argch}(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)+1}{2}}) = \dfrac{|x|}{2}$

Sujet 8.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$e^a - e^b = 2e^{\frac{a+b}{2}}\operatorname{sh}(\frac{a-b}{2}) \quad , \quad e^a + e^b = 2e^{\frac{a+b}{2}}\operatorname{ch}(\frac{a-b}{2})$$

2. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$