بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيم

Devoir Libre $N°$ 2

$a\bar{z}+b$ Automorphismes de $\mathbb{D}$, Similitudes Planes $az+b$

À rendre le

Définition

✍ Soit $k>0$, on appelle similitude plane toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M , N : $f(M)f(N) = kMN$.
✍ On appelle isométrie plane toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M,N : $f(M)f(N) = MN$.

Exercice 1 (Automorphismes de $\mathbb{D}$)

On note $\mathbb{D}$ et $\mathbb{U}$ les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ définies par :
$\mathbb{D} := \{z\in\mathbb{C}\ ,\ |z|\leq 1\}$ et $\mathbb{U} := \{z\in\mathbb{C}\ ,\ |z| = 1\}$

1. Soit a un nombre complexe tel que $|a|<1$.
   - 1.1 Justifier , pour tout nombre complexe $z\in\mathbb{D}$, que $1-\overline{a}z\neq 0$.
     Pour $z\in\mathbb{D}$ on pose $f_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.
   - 1.2 Montrer que pour tout $z\in\mathbb{D}$; $1-|f_a(z)|^2=\dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$.
   - 1.3 Montrer que $f_a(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$, et en déduire que $f_a(\mathbb{D})=\mathbb{D}$.
   - 1.4 Montrer que $f_a(\mathbb{U})=\mathbb{U}$ et que $f_a(\mathbb{D}\setminus\mathbb{U})=\mathbb{D}\setminus\mathbb{U}$.
2. Soient $a,b\in\mathbb{C}$ tels que $|a|^2-|b|^2=1$.
   - 2.1 justifier que pour tout $z\in\mathbb{D}$; $\overline{b}z+\overline{a}\neq 0$.
     Pour tout $z\in\mathbb{D}$, on pose $g(z)=\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$.
   - 2.2 Montrer que $g(\mathbb{D})=\mathbb{D}$, $g(\mathbb{U})=\mathbb{U}$ et $g(\mathbb{D}\setminus\mathbb{U})=\mathbb{D}\setminus\mathbb{U}$.
     Ind : on pourra exprimer g en fonction de $f_{a'}$ avec a' bien choisi.

PROBLÈME :

Première partie :

1. Donner l'écriture complexe de la rotation de centre w et d'angle θ.
2. Donner l'écriture complexe de l'homothétie de centre w et de rapport k.
3. Donner l'écriture complexe de la symétrie par rapport à l'axe (Ox).

4. Donner l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O.

Deuxième Partie :

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $f(z) = az + b$ et $g(z) = a\overline{z} + b$.

1. Montrer que si $|a| = 1$, alors f et g sont des isométries.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors f et g sont des similitudes.
3. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que f préserve les angles orientés et que g transforme tout angle orienté en son opposé.
4. On suppose que $a \neq 0, 1$.
   4.1 Montrer que f admet un point fixe w.
   4.2 Montrer que f est la composée de la rotation de centre w et d'angle θ que l'on déterminera et de l'homothétie de centre w et de rapport k que l'on déterminera.
5. On suppose que $|a| = 1$ et $b = 0$,montrer que g est la symétrie d'axe (ou) tel que $((ox), (ou)) = \frac{\arg a}{2}\ [\pi]$.
6. On suppose que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $|a| \neq 1$.
   6.1 Montrer que g admet un point fixe w.
   6.2 Montrer que g est la composée commutative de symétrie par rapport à (Ωu) où $((\Omega x), (\Omega u)) = \frac{\arg a}{2}\ [\pi]$ et l'homothétie de centre w et de rapport $|a|$. (Ω le point d'affixe w).
7. On suppose que $|a| = 1$.
   7.1 Montrer que si $a\overline{b} + b = 0$, alors l'ensemble des points fixes de g est la droite (D) d'équation $\mathrm{Re}(b)x + \mathrm{Im}(b)y - \frac{|b|^2}{2} = 0$, et que g est la symétrie par rapport à la droit (D).
   7.2 Montrer que si $a\overline{b} + b \neq 0$, alors g est la composée d'une symétrie que l'on déterminra et la translation de vecteur v d'affixe b.

Troisième Partie :

Dans cette partie on suppose que f est une similitude plane de rapport $k > 0$.

1. Montrer que $f(0) \neq f(1)$.
   Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}$
2. Montrer que g est une isométrie plane.
3. Montrer que $g(i) = i$ ou $g(i) = -i$.
4. Montrer que si $g(i) = i$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $g(z) = z$.
5. Montrer que si $g(i) = -i$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{z}$.
6. Conclusion.

Définition

✍ Une similitude de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ est dite similitude directe.
✍ Une similitude de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ est dite similitude indirecte.

END