بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir surveillé $N°$ 1

Il sera tenu compte,dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

$\emptyset$ $\mathscr{P}(E)$

Corrigé

Définitions

Soit E un ensemble et $T \subseteq \mathscr{P}(E)$ (écoutez mois bien! T est un ensemble formé par des parties de E.).
✍ On dit que T est une algèbre sur E si ;

1. $\emptyset \in T$; (T contient l'ensemble vide),
2. Si $A \in T$ alors $\overline{A} \in T$;(T stable par passage au complementaire) ,
3. Si $A, B \in T$ alors $A \cup B \in T$; (T stable par union finie).

✍ On dit que T est une tribu si T vérifie les propriétés 1. et 2. de la définition précédente et : ($\star$) pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (T est stable par union dénombrable "ensemble d'indices est $\mathbb{N}$").
✍ On résume : une tribu sur E est une algèbre sur E dans laquelle la propriété 3. a été remplacée par la propriété ($\star$).

✍

Exercice 1 Soit $x \in E$, puisque $\mathscr{S}$ est réflexive alors $f(x)\mathscr{S}f(x)$, donc $x\mathscr{R}x$.
Soient $x, y \in E$, avec $x\mathscr{R}y$, donc $f(x)\mathscr{S}f(y)$, et puisque $\mathscr{S}$ est symétrique , on obtient $f(y)\mathscr{S}f(x)$, ainsi $y\mathscr{R}y$.
Soient $x, y, z \in E$, tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}y$, donc $f(x)\mathscr{S}f(y)$ et $f(y)\mathscr{S}f(z)$, comme $\mathscr{S}$ est transitive , alors $f(x)\mathscr{S}f(z)$, donc $x\mathscr{R}z$.
Ceci montre que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, donc $x\mathscr{R}x$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathscr{R}y$, donc $x - y \in \mathbb{Z}$, donc aussi $y - x \in \mathbb{Z}$, d'où $y\mathscr{R}y$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, donc $x - y \in \mathbb{Z}$ et $y - z \in \mathbb{Z}$, on alors $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$, d'où $x\mathscr{R}z$.
Donc $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

PROBLÈME

Première partie :
Questions préliminaires.

Soient E , F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

$\boxed{1.}$ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$.

2. Soit $x \in E$; on a $x \in f^{-1}(\overline{A})$ ssi $f(x) \in \overline{A}$ ssi $f(x) \notin A$ ssi $x \notin f^{-1}(A)$ ssi $x \in \overline{f^{-1}(A)}$. Il vient alors que $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.

3. Soit $x \in E$; on a $x \in f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ ssi $f(x) \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) \in A_n$ ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in f^{-1}(A_n)$ ssi $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$.

4. Soit $x \in E$; on a $x \in f^{-1}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ ssi $f(x) \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) \in A_n$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in f^{-1}(A_n)$ ssi $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$.

5. Soit $x \in E$;
$x \in \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n}$ ssi $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin B_n$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{B_n}$ ssi $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$.
$x \in \overline{\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n}$ ssi $x \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin B_n$ ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \overline{B_n}$ ssi $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$.

Deuxième partie :
Quelques exemples et propriétés.

6. **Exemples :**

6.1 Tribu **Grossière** : Il contient $\emptyset$ et stable par passage au complémentaire. Si $(A_n)_n$ est une famille de partie de T, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \in T$ si toutes les A_n sont vides, ou $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E \in E$ si l'une des $A_n = E$.

6.2 Tribu **discrète** : Il n'y a rien à démontrer dans cette question : $\emptyset$ est une partie de E, le complémentaire d'une partie de E est une partie de E, et l'union de parties de E est une partie de E.

6.3 T contient l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire (regarder le complémentaire de chaque élément) et stable par union (regarder toutes les possibilités de deux éléments de T).

7. **Propriétés :** Soit T une tribu sur un ensemble E.

7.1 On a $\emptyset \in T$ et T stable par passage au complémentaire donc $E = \overline{\emptyset} \in T$.

7.2 D'après la question 5. , on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$, puisque T est stable par passage au complémentaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\overline{A_n} \in T$, donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in T$, il vient alors que $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \in T$.

8. Soit T une tribu, la seule propriété à démontrer est la stabilité par union finie : Soient $A, B \in T$, posons $A_0 = A$, $A_1 = B$ et pour tout $n \geq 2$, $A_n = \emptyset$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in T$ et $A \cup B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

Troisième partie :
Image réciproque et trace .

9. Comme $\emptyset \in T'$, alors $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in T$.
Soit $B \in T$, alors il existe $A \in T'$ tel que $B = f^{-1}(A)$, d'après le résultat de la question 2. on a $\overline{B} = f^{-1}(\overline{A}) \in T$ car $\overline{A} \in T'$.
Soit $(B_n)_n$ une suite d'éléments de T, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $A_n \in T'$ tel que $B_n = f^{-1}(A_n)$, d'après le résultat de la question 3. on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ qui est bien un élément de T car $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T'$.

10. Il suffit 'appliquer le résultat de la question précédente à $f : B \to E$ définie par $f(x) = x$, on a bien $T_B := \{B \cap A \,,\ A \in T\} = \{f^{-1}(A) \,,\ A \in T\}$ qui est bien une tribu sur B.

End