

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé N°

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

A

det

PCSI 1

Questions de Cours

1. Rappeler la définition de deux événements incompatibles.
2. Rappeler la définition de deux événements indépendants.
3. $\det(AB) = ?$, $\det(\lambda A) = ?$, $\det(I_n) = ?$ et $\det(A) = 0$ où A est une matrice triangulaire.
4. F sous espace vectoriel de E si :
5. La famille (u_1, \dots, u_p) est libre si :

Exercice 1 Soit $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ est absolument convergente si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 1$.

Exercice 2

Étudier l'inversibilité de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 4

On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associée à A .

1. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner l'expression de $f(x, y, z)$.
2. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
Pour chacune de ces valeurs déterminer un vecteur X tel que $AX = \lambda X$ et dont la deuxième composante vaut 1.
3. On pose $v_1 = (3, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$.
Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.
5. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base \mathcal{B} , exprimer une relation entre A, B et P .
6. Calculer B^n , puis A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

END