Ensembles

Exercice 1.

Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer que

1. Si $A \subset B$ alors $A \cap C \subset B \cap C$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow A = A \cap B$.
3. $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Exercice 2.

A et B étant des parties d'un ensemble E. Montrer que les proprietés suivantes sont équivalentes.

1. $A \subset B$.
2. $\overline{B} \subset \overline{A}$.
3. $B \cup \overline{A} = E$

Exercice 3.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Que valent $A \setminus \emptyset$ et $A \setminus A$?
2. Montrer que $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.
3. Montrer que $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Exercice 4.

Soient E un ensemble et $P(x)$ et $Q(x)$ deux assertions dépendants de la variable $x \in E$. On pose $A = \{x \in E | P(x)\}$ et $B = \{x \in E | Q(x)\}$.

1. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x))$.
2. Montrer que $A = B \Leftarrow (\forall x \in E, P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

Exercice 5.

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

1. Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Montrer que $(A \Delta B) \Delta B = A$.

Exercice 6.

A, B, C étant trois parties d'un ensemble E, montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A\cup B\subset A\cup C \\ A\cap B\subset A\cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B\subset C$$

Exercice 7.

Soient E, F deux ensembles, A une partie de E et B une partie de F. Déterminer $\overline{A\times B}$.

Exercice 8.

Démontrer que pour toutes parties A, B et C d'un même ensemble E :

1. Montrer que $A\setminus B = A\cap \overline{B}$.
2. $A\backslash B = C_E^B \backslash C_E^A$.
3. $A\backslash (B\cap C) = (A\backslash B)\cup (A\backslash C)$.
4. $A\backslash (B\cup C) = (A\backslash B)\cap (A\backslash C)$.

Exercice 9.

Soit $E=\{0,1\}$
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :
$0\in E$, $\{0\}\in E$, $\{\emptyset\}\subset E$, $\{1\}\subset E$, $\{0,\emptyset\}\subset E$, $\{\{0\},1\}\subseteq E$.

Exercice 10.

Soit x un objet, décrire les ensembles
$\mathscr{P}(\{x\})$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{x\}))$

Exercice 11.

Soit E un ensemble.
A , B et C des parties de E telles que :
$A\cup B = A\cap C$, $B\cup C = B\cap A$ et $C\cup A = C\cap B$
Montrer que $A=B=C$

Exercice 12.

Soit E un ensemble. A , B et C des parties de E. Montrer que

1. $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$
2. $\begin{cases} A\cap B\subset A\cap C \\ A\cup B\subset A\cup C \end{cases}\Rightarrow B\subset C$
3. $(B\backslash C\subset A \text{ et } C\backslash D\subset A)\Rightarrow B\backslash D\subset A$

Exercice 13.

Soient A et B deux parties d'un ensemble non vide E. Démontrer que

$$A=B\Leftrightarrow A\cup B=A\cap B$$

Exercice 14.

Parmi les applications suivantes, déterminer les injections, les surjections et les bijections :

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ définie par $f(x)=x^2$
3. $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ définie par $f(x)=x^2$
4. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $f(n)=2n$.
5. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $f(n)=n/2$ si n est pair et $f(n)=\dfrac{n-1}{2}$ si n est impaire. (ind : calculer $f(0)$ et $f(1)$).

Exercice 15 (Fonction indicatrice)**.**

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E on note φ_A l'application de $E\to\{0,1\}$ définie par $\varphi_A(x)=1$ si $x\in A$ et 0 sinon. Montrer que

1. $A=B\Leftrightarrow\varphi_A=\varphi_B$
2. $\varphi_{A\cap B}=\varphi_A\varphi_B$
3. $\varphi_{\overline{A}}=1-\varphi_A$
4. $\varphi_{A\cup B}=\varphi_A+\varphi_B-\varphi_{A\cap B}$
5. $\varphi_{A\backslash B}=\varphi_A(1-\varphi_B)$
6. En déduire que $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$.
7. **Application :** Résolution de l'équation $A\Delta X=B$:
   - 7.1 Calculer $A\Delta A$.
   - 7.2 Résoudre l'équation $A\Delta X=B$ d'inconnu X.

Exercice 16.

Soit E un ensemble et $h : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$, l'application définie par $g(A) = \overline{A}$.

1. Montrer que g estt injective.
2. Montrer que g est surjective.
3. En déduire que g est bijective.
4. Déterminer l'application $g \circ g$.

Exercice 17.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective
4. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective

Exercice 18.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = [1,2]$ et $B = [-1,3]$.

1. Déterminer $f(A)$.
2. Déterminer $f^{-1}(B)$.

Exercice 19.

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si C et D sont des parties de F, alors $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
2. Montrer que si A et B sont des parties de E, telles que $A \subseteq B$, alors $f(A) \subseteq f(B)$.
3. Montrer que si A et B sont des parties de E, alors $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ et $f(\cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{R}_-$. Déterminer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.