Polynômes

Exercice 1.

Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $X^2 - X(X+2)$.
2. $X^5 - X(X+1)^2$.
3. $X^{10} - \sum_{k=0}^{10} \frac{X^k}{k!}$.
4. $\prod_{k=1}^{n}(kX-3)$.
5. $X^n - \prod_{k=1}^{n}(X+2k)$.
6. $(X+2)^6 - (X-2)^6$.

Exercice 2.

On considère le polynôme $P = (X+1)^n$.

1. Calculer de deux façons la dérivée du polynôme P.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

Exercice 3.

On considère l'équation polynômial (E) : $(P')^2 = 4P$.

1. Montrer qu'un polynôme de la forme $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$, où $b \in \mathbb{K}$, vérifie (E).
2. Soit P un polynôme non nul vérifiant (E).
   - 2.1 Déterminer le degré de P.
   - 2.2 Trouver la forme de P.

Exercice 4.

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifiant : $P(0) = -1$ et $P(1) = 2$.
2. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(1) = 0$, $P(2) = 0$ et $P(0) = 1$.

Exercice 5.

Effectuer la division euclidienne suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^3 - 1$ par $X^2 + X + 1$.
2. $3X^5 + 4X + 1$ par $X^2 + 2X + 3$.
3. $X^4 + 1$ par $(X-1)^2$.

Exercice 6.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ est $X + 1$.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$?

Exercice 7.

Soit R le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X+1)$.

1. Que dire du degré de R ?
2. Trouver la valeur de R en -1 et 1.
3. En déduire R.

Exercice 8.

Soit R le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $(X-1)^2$.

1. Que dire du degré de R ?
2. Calculer $R(1)$ et $R'(1)$.
3. En déduire R.

Exercice 9.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et P le polynôme $P = (\sin(\theta)X + \cos(\theta))^n$. Notons R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$dans $\mathbb{R}[X]$. Calculer $R(i)$. En déduire R.

Exercice 10.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. On pose $Q = P(X) - P(0)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.
2. En déduire que P est constant.

Exercice 11.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(e^t) = 0$. Que dire de P ?

Exercice 12.

Soit $P = X^3 - 3X^2 + 6X - 8$.

1. Montrer que 2 est une racine de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13.

Soit $P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$.

1. Vérifier que -1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Factoriser P.

Exercice 14.

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ les deux polynômes :
$X^4 + X^2 + 1$, $X^4 - X^2 + 1$

Exercice 15.

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 - 1$

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 17.

Soient x, y et z trois réels tels que $x + y + y = 2$, $xyz = -\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. On considère le polynôme $P = (X - x)(X - y)(X - z)$.

1. Vérifier que $xy + yz + zx = -\frac{1}{4}$.
2. Montrer que $P = X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$.
3. Vérifier que $P(2) = 0$, en déduire les valeurs de x, y et z.