Matrices

Exercice 1.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^0, A^1 et A^2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$

Exercice 2.

On considère les matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2, puis J^3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$.
3. Donner une relation entre A et J.
4. En déduire une expression de A^n (où $n \in \mathbb{N}^*$), en fonction de n.

Exercice 3.

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que si $xI + yA = 0$, alors $x = y = 0$.
2. Calculer A^2, expliciter α et β tels que $A^2 = \alpha I + \beta A$.
3. Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_n I + b_n A$.
4. Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Que vaut a_0, b_0, a_1,b_1 ?
5. Montrer que a_n est une suite récurrente d'ordre 2.

Exercice 4.

Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.

Exercice 5.

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

1. Montrer que pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, $E(t)E(s) = E(t+s)$.
2. Que vaut $E(t)E(-t)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(nt) = E(t)^n$.

Exercice 6.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer D^n.
2. Calculer PQ et QP.
3. Montrer que $AP = PD$, en déduire que $A = PDQ$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$.
5. Expliciter A^n, en fonction de n.

Exercice 7.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

1. Calculer B^2, puis B^3.
2. En déduire B^k, pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Calculer A^n (remarquer que $A = B + 2I$).

Exercice 8.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A et B commutent si, et seulement si, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
2. Montrer que A et B commutent si, et seulement si, $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

Exercice 9 (Commutant d'une matrice).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le commutant comme étant l'ensemble de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. On note $\mathcal{C}(A)$ cette partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que 0 et A sont dans $\mathcal{C}(A)$.
2. Montrer que si $B, C \in \mathcal{C}(A)$, alors $BC \in \mathcal{C}(A)$.
3. Soit $B \in \mathcal{C}(A)$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k \in \mathcal{C}(A)$. En déduire que $A^k \in \mathcal{C}(A)$.
4. Montrer que si $B, C \in \mathcal{C}(A)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha B + \beta C \in \mathcal{C}(A)$.
5. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{C}(A) = \{xI + yA \ / x, y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 10.

Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = I$ (c'est-à-dire A n'est pas inversible).
3. Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$.

Exercice 11.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(I - A)(I + A + \ldots + A^{m-1}) = I - A^m$.
2. Généralisation : Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.Montrer que $(B^m - A^m) = (B - A)(\sum_{k=0}^{m-1} B^k A^{m-k-1})$.

Exercice 12.

Une matrice carrée N est dite antisymétrique si ${}^tN = -N$.
Soit M une matrice carrée

1. Montrer que la matrice $\frac{1}{2}(M + {}^t M)$ est symétrique.
2. Montrer que la matrice $\frac{1}{2}(M - {}^t M)$.
3. Montrer que M s'écrit sous la forme $M = S + A$ où S est une matrice symétrique et A antisymétrique.