Applications linéaires

Exercice 1.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Vérifier que $f(0) = 0$.
2. Soit G un sous espace vectoriel de F. Montrer que $f^{-1}(G)$ est un sous espace vectoriel de E.
3. Soit H un sous espace vectoriel de E. Montrer que $f(H)$ est un sous espace vectoriel de F.
   On pose $\ker f = f^{-1}(\{0\})$.
4. Montrer que f est injective si, et seulement si, $\ker f = \{0\}$.
5. Applications : Montrer que les parties suivantes sont des sous espace vectoriels de E :
   - 5.1 $F_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(2) = 0\}$, $E = \mathbb{K}[X]$.
   - 5.2 $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x + y + z = 0\}$, $E = \mathbb{K}^3$.

Exercice 2.

On considère l'application $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x - 2y + 3z \\ x + 2z \\ 2z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Montrer que les ensembles $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / f(X) = X\}$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / f(X) = 2X\}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Justifier que chacun de ces sous espaces vectoriels possède une base constituée d'un unique vecteur e_1 pour E_1 et e_2 pour E_2.
5. Déterminer un vecteur non nul e_3 tel que $f(e_3) = 2e_3 + e_2$.
6. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$ et $f : E \to E$ l'application définie par $f(P) = -3P + XP'$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 0$.
   - 2.1 Montrer que $P(0) = 0$.
   - 2.2 Montrer que $P'(0) = P''(0) = 0$.
3. Montrer que $\ker f = \text{vect}(X^3)$

Exercice 4.

Soit l'application notée tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ par $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ (ce nombre est appelé trace de M).

1. un exemple : Déterminer la trace de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer la trace de la matrice I_n.
2. Montrer que tr est une application linéaire.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, donner une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(M) = \alpha$. Qu'en déduit-on ?
   Soit A une matrice non nulle fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = M - 2\operatorname{tr}(M)A$.
4. Montrer que f est une application linéaire.
5. Dans cette question on suppose que $\operatorname{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$.
   - 5.1 Montrer que f est injective.
   - 5.2 Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $M = N - \dfrac{2\operatorname{tr}(N)}{1-2\operatorname{tr}(A)}A$. Calculer $\operatorname{tr}(M)$, puis vérfier que $f(M) = N$.
   - 5.3 En déduire que f est un isomorphisme.
6. Dans cette question on suppose que $\operatorname{tr}(A) = \frac{1}{2}$, et on note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$.
   - 6.1 Montrer que la somme $H + \operatorname{vect}(A)$ est directe.
   - 6.2 En remarquant que $M = M - 2tr(M)A + 2\operatorname{tr}(M)A$, montrer que les sous espaces vectoriels H et $\operatorname{vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Soit D la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = DM - MD$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \ker f$ si, et seulement si, $MD = DM$.
3. Montrer que $\ker f = \{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$