Probabilités

Exercice 1.

On considère un nombre entier naturel p.

1. Montrer la formule du triangle de Pascale $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$, où $0\leq k\leq n-1$.
2. Montrer par récurrence sur n la formule suivante : $\forall n\geq p,\ \sum\limits_{k=p}^{n}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\p+1\end{pmatrix}$.
3. Expliciter $\binom{k}{p}$ en fonction de k, lorsque $p=1,2,3$.
4. En déduire une expression factorisée des sommes suivantes : $\sum\limits_{k=0}^{n}k$, $\sum\limits_{k=0}^{n}k(k-1)$, $\sum\limits_{k=0}^{n}k(k-1)(k-2)$.

Exercice 2.

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on note $A_n=\{\text{Le } n\text{-ème lancer donne Pile}\}$.

1. Décrire par une phrase chacun des événement suivant :

   $B_0=A_5\cap A_6\cap A_7$, $B_1=A_2\cap\overline{A_3}$, $B_2=\bigcap\limits_{n=4}^{+\infty}A_n$, $B_3=(\bigcap\limits_{n=1}^{4}\overline{A_n})\cap(\bigcap\limits_{n=5}^{+\infty}A_n)$, $B_4=\bigcup\limits_{n=6}^{+\infty}A_n$.
2. Écrire à l'aide des A_n les événements :
   $A=$ "On obtient au moins une fois Pile après le 5-ème lancer".
   $B=$ "On obtient que des Piles a partir du 3-ème lancer "

Exercice 3.

Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),p)$ un espace probabilisé fini. A , B et C trois événements mutuellement indépendants de probabilités différentes de 0 et 1.

1. Exprimer $p(B\cup C)$ en fonction de $p(B)$ et $p(C)$.
2. Montrer que A et $B\cup C$ sont indépendants.

Exercice 4.

Une entreprise recrute un cadre. n candidats se présentent pour le poste (n entier naturel non nul fixé). Chacun d'entre eux passe un teste et le premier qui y satisfait est engagé. La probabilité qu'a un candidat de réussir le test est $p\in]0,1[$. On note $q=1-p$.
Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on note A_k l'événement "le k-ième candidat qui se présente est engagé", et A_{n+1} l'événement "aucun des n candidats n'est engagé "

1. Calculer la probabilité de A_k pour $1\leq k\leq n+1$.
2. Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{n+1}P(A_k)=1$.

Exercice 5.

Soit $n \geq 3$. Un joueur lance une bille sur une planche percée de n trous numérotées de 1 à n. La bille tombe dans un trou et un seul. On sait que la bille tombe dans le trou numéro k pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ avec la probabilité $1/3^k$. Quelle est la probabilité que la bille tombe dans le trou numéro n.

Exercice 6.

On a deux urnes U_1 et U_2 . Dans U_1, il y a 3 boules rouges et 5 boules blanches. Dans U_2, il y a 5 boules rouges et 6 boules blanches. Les boules blanches sont indiscernables entre elles, les boules rouges aussi.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 . On tire ensuite, toujours au hasard, une boule dans U_2 et on la met dans U_1. On note R_1 l'événement " on a tiré une boule rouge de U_1" et R_2 l'événement "on a tiré une boule rouge de U_2".

1. Déterminer $P(R_1)$ et $P(R_2|_{R_1})$.
2. Déterminer la probabilité d'avoir tiré deux boules rouges consécutive. Que peut-on alors dire de la composition de l'urne U_1.
3. Déterminer la probabilité pour qu'au cours de l'expérience la composition de l'urne U_1 n'ait pas changé.

Exercice 7.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini.

1. Soient A et B deux événements. Montrer que $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$.
2. Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements, alors $p(\cup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} p(A_k)$.
3. Soit A, B et C trois événements équiprobables, de probabilité p, et tels que $p(A \cap B \cap C) = 0$. Montrer que $p \leq \dfrac{2}{3}$.
   Indication : $1 - p(A \cap B \cap C) = \ldots \leq \ldots$

Exercice 8.

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat : pile ou face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement "obtenir pile au n-ème lancer", F_n l'événement "obtenir face au n-ème lancer", et on note enfin u_n la probabilité qu'au cours de n lancers consécutifs, on n'ait jamais obtenu deux piles successifs.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ forme un système complet d'événements.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n$.

Exercice 9.

Soit p une probabilité sur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ telle que $p(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$ et $p(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$. On pose $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ et on suppose que $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$. Déterminer entièrement la probabilité p.

Exercice 10.

On lance deux fois de suite un dé équilibré à six faces.

1. Préciser l'univers associé à cette expérience aléatoire, ainsi que son cardinal.
2. Trouver un libellé pour l'événement $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,5), (6,6)\}$.
3. A quelle partie correspondant l'événement B : "La somme des deux numéros est inférieur ou égale à 4 ".
4. Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 11.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini.

1. Soient A et B deux événements indépendants, montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2. Soient A et B deux événements indépendants, montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. Soient A et B deux événements incompatibles. A quelle condition sont-ils indépendants ?
4. A quelle condition l'événement A est indépendant de lui même ?

Exercice 12.

Une puce évolue sur trois cases A,B et C. A l'instant $t = 0$, la puce se situe sur la case A puis elle se déplace de façon aléatoire sur ces trois cases selon la règle suivante :
- Si la puce se trouve en A ou en B à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$), alors elle ira sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité à l'instant $k+1$.
- Si la puce se trouve en C à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$), alors elle y restera à l'instant $k+1$.
Pour tout ($n \in \mathbb{N}$), on définit les événement suivants :
• A_n : " La puce se trouve en A à l'instant n".
• B_n : " La puce se trouve en B à l'instant n".
• C_n : " La puce se trouve en C à l'instant n".
et on pose $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

1. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$.
   - 2.1 Montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique et en déduire la valeur de c_n en fonction de n.
   - 2.2 A l'aide de la suite $(v_n)_n$ déterminer les valeurs de a_n et b_n en fonction de n

Exercice 13.

Pour un examen, dix examinateur ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus, les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.
On note A_1 l'événement : "les deux sujets obtenues par le premier candidat proviennent du même examinateur " et A_2 l'événement "les deux sujets obtenues par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ".

1. Montrer que $p(A_1) = \dfrac{1}{19}$.
2. 2.1 Calculer la probabilité $p(A_2|_{A_1})$.
   2.2 Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\dfrac{1}{323}$.
3. 3.1 Calculer la probabilité $p(A_2|_{\overline{A_1}})$.
   3.2 En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$, calculer la probabilité $p(A_2)$, puis déduire que $p(A_1 \cup A_2) = \dfrac{33}{323}$
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur.
   4.1 Déterminer $X(\Omega)$.
   4.2 Déterminer la loi de la probabilité de X.
   4.3 Calculer l'espérance de X.

Exercice 14.

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotés de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k $(0 \leq k \leq 6)$. Ce dé a été pipé de telle sorte que : Les six faces ne sont pas équiprobables, les six nombres $p_1, p_2, p_3, p_4, p_6, p_6$, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r. Les nombres p_1, p_2, p_4, dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Montrer que $p_k = \dfrac{k}{21}$.
2. On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants : A : "Le nombre obtenu est pair ", B : "Le nombre obtenu est supérieur ou égale à 3", C : "Le nombre obtenu est 3 ou 4".
   2.1 Calculer la probabilité de chacun de ces événements.
   2.2 Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égale à 3, sachant qu'il est pair.
   2.3 Les événement A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?
3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires. D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire. Le joueur lance le dé : s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1, s'il obtient un nombre impaire, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2. On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet événement.
   3.1 Déterminer la probabilité de l'évenement $G \cap A$, puis la probabilité de l'événement G.
   3.2 Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer.

Exercice 15.

Le Web est constitué de milliards de pages et des liens qui les relient. On considère, dans cet exercice, un minuscule réseau constitué des trois pages , notées A , B et C avec :
Deux liens sur la page A, l'un pointant vers la page B et l'autre vers la page C.
Deux liens sur la page B, l'un pointant vers la page A, l'autre vers la page C.
et enfin quatre liens sur la page C, un pointant vers la page A, un pointant vers la page B et deux liens pointant sur la page C.
Un promeneur impartial navigue sur ce réseau en cliquant sur les liens qui lui sont offerts.
Il est initialement (à l'instant $t = 0$) sur la page A. il peut ensuite soit cliquer sur le lien pointant vers B, soit sur lient pointant vers la page C pour se trouver à l'instant après (instant $t = 1$), soit sur la page B, soit sur la page C.
Il poursuit ensuite sa promenade de la manière suivante : si à un instant $t = n$, il se trouve sur une page A , B ou C, il clique alors sur l'un des liens présents sur cette page, pour se trouver à l'instant $t = n+1$, sur la page correspondante au lien cliqué. Pour tout entier n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n.
A_n : "à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page A ".
B_n : "à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page B ".
C_n : "à l'instant $t = n$, le promeneur se trouve sur la page C ".

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n, C_n et on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
2. Pour tout entier n, déterminer en justifiant, la valeur de $a_n + b_n + c_n$.
3. 3.1 Montrer que $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$
   3.2 Déterminer les probabilités conditionnelles $p(A_{n+1}|A_n)$, $p(A_{n+1}|_{B_n}$, ...
   3.3 Déterminer une relation entre b_{n+1}, a_n et c_n d'une parte, et c_{n+1}, a_n, b_n et c_n d'autre part.
4. Donner pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de c_n.
5. Déterminer alors une matrice M telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$. Exprimer U_n en fonction de M , U_0 et n.
6. 6.1 Calculer M^2 et M^3 puis déterminer une relation entre M^3 , M^2 et M. On déterminera des réels a, b tels que $M^3 = aM^2 + bM$.
   6.2 Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels u_n, v_n tels que $M^n = u_n M^2 + v_n M$.
   6.3 Donner les relations entre u_{n+1}, u_n, v_n d'une part, et entre v_{n+1}, u_n, v_n d'autre part.
   6.4 Montrer que la suite $(u_n + v_n)_n$ est constante et en déduire que une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
   6.5 On pose $w_n = u_n - \frac{2}{3}$. Montrer que la suite $(w_n)_n$ est géométrique, puis déterminer les expression de u_n et v_n en fonction de n.
   6.6 En déduire les probabilités a_n et b_n, pour $n \geq 1$.