

## Matrices

### Exercice 1.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que  $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible si, et seulement si,  $ad-bc \neq 0$ .

### Exercice 2.

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} \text{ch}(x) & \text{sh}(x) \\ \text{sh}(x) & \text{ch}(x) \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^2$ .
2. Calculer pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$ .

### Exercice 3.

Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.  $(M - I_3)(M + 3I_3)$ .
2. En déduire que  $M$  est inversible et déterminer  $M^{-1}$ .

### Exercice 4.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^3 - 4A^2 + 5A$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A^2$ ,  $A$  et  $I_3$ .

### Exercice 5.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. Dans cette question  $n = 2$ . Montrer que  $\mathcal{C} = \text{Vect}(I_2)$ . (Ind : utiliser la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .)

**Exercice 6.**

Vérifier que chacune de ces applications est linéaire de  $E$  dans  $F$ , et donner les matrices associées relativement aux bases canoniques de  $E$  et  $F$  :

1.  $f(x, y, z) = (2x + z, x + 2y - z, z, 3y - 4z)$ ,  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \mathbb{R}^4$
2.  $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ ,  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \mathbb{R}^3$
3.  $f(A) = {}^t A$ ,  $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $F = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
4.  $f(x, y, z, t) = (x + 2y, z - t, x + 2t)$ ,  $E = \mathbb{R}^4$  et  $F = \mathbb{R}^3$

**Exercice 7.**

Déterminer les applications linéaires  $f$  et  $g$  canoniquement associées aux matrices  $A$  et  $B$  respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Quelle est la matrice de  $g \circ f$  et de  $f \circ g$  relativement aux bases canoniques.

**Exercice 8.**

On note  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associée à  $A$ .

1. Déterminer les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles la matrice  $A - \lambda I_3$  n'est pas inversible.  
Pour chacune de ces valeurs déterminer un vecteur  $X$  tel que  $AX = \lambda X$  et dont la deuxième composante vaut 1.
2. On pose  $e_1 = (3, 1, 0)$ ,  $e_2 = (-1, 1, 1)$  et  $e_3 = (0, 1, 1)$ .  
Montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
4. Donner la matrice de passage  $P$  de la base canonique à la base  $(e_1, e_2, e_3)$ , exprimer une relation entre  $A, B$  et  $P$ .
5. Calculer  $B^n$ , puis  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 9.**

1. Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et  $B = A - 2I_3$

1.1 Calculer,  $B^2, B^3$ , en déduire  $B^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1.2 Calculer  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  et  $(w_n)_n$  trois suites de nombres réels telles que,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$$

Donner l'expression de  $u_n, v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n, u_0, v_0$  et  $w_0$ .

**Exercice 10.**

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Où  $x, y$  et  $z \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 11.**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que  $(A - 6I_3)(A^2 - 3I_3) = 0$ .

2. Montrer que pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $A^n = P_n(A)$ .

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $P_n$  en fonction de  $n$ , et en déduire une expression de  $A$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 12.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  ${}^t X X = 0$ , montrer que  $X = 0$ .

2. Montrer que  $\ker A = \ker {}^t A A$ .

3. En déduire que  $\text{rg } A = \text{rg } {}^t A A$

**Exercice 13.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de rang 1.

Notons  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$  la **trace** de  $A$ .

1. Montrer qu'ils existent deux vecteurs colonnes  $U$  et  $V$  telle que  $A = U^t V$ .
2. Montrer que  $\text{tr}(A) = {}^t V U$ .
3. Montrer que  $A^2 = \text{tr}(A)A$ .
4. Soit  $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \text{Tr}(A)X\}$  et  $G = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$ .
  - 4.1 Justifier que  $F$  et  $G$  sont des sous espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .
  - 4.2 Donner la dimension de  $G$ .
  - 4.3 Montrer que si  $\text{tr}(A) \neq 0$ , alors  $F \cap G = \{0\}$  et que  $F$  est une droite vectoriel, et montrer dans ce cas que

la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \text{tr } A \end{pmatrix}$

**Exercice 14.**

Soit  $E) \mathbb{K}_n[X]$ , et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  définie pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  par  $f(P) = P(X + 1)$ .

1. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .
2. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique. On note  $A$  cette matrice.
3. Justifier que  $A$  est inversible, et donner son inverse.

**Exercice 15.**

Calculer le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2n-1 \\ n & n+1 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

**Exercice 16.**

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 17** ( Matrice de rotation hyperbolique).

Pour  $t \in \mathbb{R}$  on note  $r_t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch } t & \text{sh } t \\ 0 & \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix}$ ,

une telle application s'appelle une **rotation hyperbolique**.

1. Déterminer l'endomorphisme  $r_0$ .
2. Calculer  $R_t R_{-t}$ , et en déduire que  $r_t$  est un automorphisme.
3. Montrer que la composée de deux rotations hyperboliques est une rotation hyperbolique.
4. Soit  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$  **hyperboloïde à deux nappes**. Montrer que  $r_t(H) = H$ .

**Exercice 18.**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables.

1. Montrer que  $A$  est inversible si, et seulement si,  $B$  l'est.
2. Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables.
3. En déduire que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P(A)$  et  $P(B)$  sont semblables.  
☞ Si  $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P(A)$  est la matrice  $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_d A^d$ .

**Exercice 19.**

On considère la suite  $(u_n)_n$  définie par  $u_0 = -1$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = AU_n$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = A^n U_0$ .
3. On considère la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 
  - 3.1 Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
  - 3.2 On pose  $D = P^{-1}AP$ . Déterminer la matrice  $D$ , en déduire l'expression de  $D^n$ , en fonction de  $n$ .
  - 3.3 Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^n P^{-1}$ .
  - 3.4 En déduire l'expression de  $A^n$ , en fonction de  $n$ .
4. En utilisant les résultats précédentes, donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 20.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  ev de dimension  $n$ ,  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que  $rg(p) = \text{tr}(p)$ . On pourra utiliser une base adaptée à la décomposition  $E = \ker p \oplus \text{Im } p$

**Exercice 21.**

On considère les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $A^2$ , puis déterminer des réels  $a$  et  $b$  tels que  $A^2 = aA + bI_2$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$  et  $I_2$ .
3. Montrer que  $P$  est inversible et préciser  $P^{-1}$ .
4. Montrer que  $AP = PD$ , où  $D$  est une matrice diagonale à déterminer.
5. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(PDP^{-1})^n = PD^n P^{-1}$
6. En déduire l'expression de la matrice  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 22.**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que  $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et  $V$  un vecteur collone non nul tel que  $AV = \lambda V$ .
  - 3.1 Calculer  $B^2 V$  en fonction de  $\lambda$  et  $V$ .
  - 3.2 Montrer que  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$