Arithmétiques dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1

Soit n un entier ≥ 1.

1. Effectuer la division euclidienne de n^2+1 par $n+1$.
2. Déterminer les entiers $n \geq 1$, tel que $n+1$ divise n^2+1.

Exercice 2

Soient a, b, c trois entiers.

1. Montrer que si a et premier avec b et c, alors a et bc sont premiers entre eux.
2. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, a et b^n sont premier entre eux.
3. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, a^m et b^n sont premiers entre eux.

Exercice 3

Montrer que pour tout entier naturel n, 13 divise $4^{2n+1}+3^{n+2}$.

Exercice 4

Soient a et b deux entiers premiers entre eux.

1. Vérifier que a^2 et b^2 sont premiers entre eux.
2. Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\text{pgcd}(a+b, a^2+b^2)$ vaut 1 ou 2.

Exercice 5

Soit p un nombre premier ≥ 5.
Montrer que 24 divise p^2-1

Exercice 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les deux entiers n^3+n et $2n^2+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 7

Soit p un entier naturel premier.
Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 8

résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équation suivantes:

1. $3x+4y=1$;
2. $8x+20y=12$;
3. $9x+12y=8$;
4. $ax+by=c$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9

Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

1. Donner le reste de la division euclidienne de 2^a-1 par 2^b-1 en fonction de r.
2. En déduire le pgcd de 2^a-1 et 2^b-1.

Exercice 10

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 11 (Nombres de Fermat)

Soient a et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer que si a^m+1 est premier, alors m est un nombre pair .
2. Montrer que m s'écrit d'une manière unique sous la forme $m=p2^n$ avec p impair et $n\in\mathbb{N}$.
3. Montrer que si 2^m+1 est premier alors m est une puissance de 2.
   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $F_n=2^{2^n}+1$ **Nombre de Fermat**.
4. Montre que si m et$n$ sont deux entiers distincts et ≥ 2, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
5. En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 12

1. Soit a un entier >1 et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si a^n-1 est premier alors $a=2$.
   Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $M_n=2^n-1$ **Nombre de Mersenne**
2. Montrer que si M_n est premier alors n est premier.

Exercice 13

Soit n un entier naturel non nul, et $p_1,p_2,\dots,p_r$ les diviseurs premier de n.
On note $d(n)$ le nombre de diviseur de n.

1. Exprimer $d(n)$ en fonction des valuations p-adiques.
2. Montrer que $\prod_{d/n} d=\sqrt{n^{d(n)}}$.

Exercice 14

Soit $\mathbb{M}$ l'ensemble des nombres premier de la forme $4k+3$ avec $k\in\mathbb{N}$; $\mathbb{M}=\{p\ /\ p$ premier et il existe $k\in\mathbb{N}$, $p=4k+3\}$

1. Montrer que $\mathbb{M}$ est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que $\mathbb{M}$ est fini, et on l'écrit $\mathbb{M}=\{p_1,p_2,\dots,p_r\}$. On pose $n=4p_1p_2\dots p_r-1$. Montrer que n admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. En déduire que $\mathbb{M}$ est infini.

Exercice 15

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si n n'est divisible pas aucun entier $\leq\sqrt{n}$, alors n est premier.

Exercice 16

Soit $n\geq 2$ un entier.

1. Montrer que les entier $n!+2, n!+3,\dots,n!+n$ ne sont pas premiers.
2. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe n entiers consécutifs non premiers.

Exercice 17

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $a=2n+1$ et $b=5n+1$.

1. Déterminer deux entiers u,v tels que $au+bv=3$.
2. En déduire les valeurs possibles de $d=a\wedge b$.
3. Montrer que si le reste de la division euclidienne de n par 3 est égale à 1, alors $d=3$. Que vaut d dans les autres cas?

Exercice 18

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, 3 divise n^3-n.
2. Soit $a,b\in\mathbb{Z}$. Montrer que 3 divise a^3-b^3 si, et seulement si, 3 divise $a-b$.