Les nombres complexes

Exercice 1.

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}^*$.
2. $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}$.
3. $(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i})^{20}$.
4. $(\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i})^{25}$.
5. $1+e^{i\theta}$.
6. $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$.
7. $\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$.

Exercice 2.

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Calculer j^3, $1+j+j^2$, $1+j^2+j^4$, j^{-1} et $\overline{j}$ en fonction de j.
2. Simplifier les expressions :

$$\frac{1+j}{(1-i)^2}, \quad \frac{1-j}{(1+i)^2}$$

Exercice 3.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 1$.

1. Montrer que $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur si, et seulement si, $z \in \mathbb{U}$.
2. Montrer que $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{U}$ si, et seulement si, z est imaginaire pur.

Exercice 4.

Soit

$$z = 1+i \quad \text{et} \quad z' = -1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de z et z'.
2. Déterminer un argument de z et un argument de z'.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de z.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{z}{z'}$.
5. En déduire les valeurs de $\cos(-\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(-\frac{5\pi}{12})$

Exercice 5.

On pose $u = -3 + 3i$.

1. Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $zu = 6\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.
2. En déduire $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

Exercice 6.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

Exercice 7.

Soit z un nombre complexe de module 1 différent de 1, montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 9.

1. Montrer que :
   $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x = 0$.
3. En déduire la valeur de $\sin\frac{\pi}{5}$ puis $\sin\frac{2\pi}{5}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x = \frac{1}{2}$.
5. En déduire la valeur de
   $\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\sin\frac{19\pi}{30}\sin\frac{25\pi}{30}$

Exercice 10.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $e^z \in \mathbb{U}$ si, et seulement si, $\operatorname{Re} z = 0$.

Exercice 11.

On pose $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués et que $\operatorname{Im} S > 0$.
2. Calculer $S + T$ et ST.
3. En déduire les valeurs de S et T.

Exercice 12.

1. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\,\mathrm{Co}\tan(\frac{\theta}{2})$.
2. Résoudre l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$.

Exercice 13.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer les les sommes :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(a+kb)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin(a+kb)$

Exercice 14.

Soient $n \geq 1$ et $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ calculer :

1. $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\zeta^k$
   Ind : On pourra calculer $(1-\zeta)S$.
2. $T = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \zeta^{pk}$, $(p \in \mathbb{Z})$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{l=k}^{n-1} C_l^k \zeta^k$.

Exercice 15.

Linéariser :
$\sin x \cos^2 2x$, $\cos^3 x \sin^4 x$, $\sin^3 2x \cos^2 3x$

Exercice 16.

Développer :
$\cos 5x \sin 2x$, $\sin^3 4x \sin 2x$

Exercice 17.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$.
2. $z^n = \overline{z}$ $(n \geq 2)$.
3. $1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{n-1} + z^n = 0$
4. $|z-1| = |z+1|$

Exercice 18.

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$$
2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant :
$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1$

Exercice 19.

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes 1 , z et z^3 soient alignés

Exercice 20.

Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que les points d'affixes 1 , iz et z^2 soient alignés

Exercice 21.

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\sin \frac{k\pi}{n}| = \frac{1}{2}|1 - e^{2i\frac{k\pi}{n}}|$
2. En déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} |\sin \frac{k\pi}{n}|$