Fonctions Convexes

Exercice 1.

Que dire d'une fonction convexe et concave sur un intervalle I ?

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction convexe positive. On suppose que f à deux zéros a et b avec $a < b$. Montrer que f est nulle sur le segment $[a, b]$

Exercice 3.

Montrer que $\forall x, y \in]1, +\infty[$, $\ln(\dfrac{x+y}{2}) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$
Ind : Utiliser la fonction $x \mapsto \ln \ln x$

Exercice 4.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose
$M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et $g(x) = f(x) - M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$, $h(x) = f(x) + M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$

1. Justifier l'existence de M.
2. Montrer que g est convexe et que h est concave.
3. Monter que pour tout $x \in [a, b]$, on a $|f(x)| \leq M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$

Exercice 5.

1. Prouver la convexité de $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1, ..., x_n) \in]0, +\infty[^n$,
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)^{\frac{1}{n}}$$
3. En déduire que $\forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, $\forall (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 6.

Montrer que $\forall x, y, a, b > 0$, on a :

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$$

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to R$ positive , bornée de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f \leq f''$

1. Montrer que f est convexe et décroissante.
2. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$
3. Soient g et h définies par $g(x) = f(x)e^x$ et $h(x) = (f(x) + f'(x))e^{-x}$ pour $x \geq 0$.
   Étudier les variations de f et de h , ainsi que le signe de h.
4. En déduire que pour $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x}$

Exercice 8.

Soit $p > 1$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

1. Montrer que f est concave.
2. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k^{\frac{1}{p}} + (\lambda_k x_k)^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq \left(1 + (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

3. Montrer pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Exercice 9.

Montrer que $\forall x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Exercice 10.

Soit p et q deux réels positifs vérifiant : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On considère $(x_i)_{1\le i\le n}$ et $(y_i)_{1\le i\le n}$ deux famille de réels positifs.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$
$$xy \le \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

2. En utilisant l'inégalité précédente, montrer que
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{q} y_i^q = 1\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le 1$$

3. En déduire l'inégalité de Hölder
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

4. En déduire pour $p>1$ l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Exercice 11.

Soient $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que
$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$