Courbes paramétrées

Exercice 1.

Étudier les courbes suivantes en $M(t_0)$ dans les cas suivants :

1. $\gamma(t) = (t^3 + 2t^4 - t^6, 3t^7)$ et $t_0 = 0$
2. $\gamma(t) = (\frac{1}{t}, 1 - 2t + t^2)$ et $t_0 = 1$
3. $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ et $t_0 = 0$
4. $\gamma(t) = (\cos t, t^2 - t^4 + 3t^5)$ et $t_0 = 0$

Exercice 2.

Étudier et tracer la courbe paramétrée suivante :
$\gamma(t) = (t + \frac{1}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2})$
Ind : Étudier la parité des composantes et remarquer que $\gamma(\frac{1}{t}) = \gamma(t)$, puis justifier que le domaine d'étude est $]0, 1]$

Exercice 3.

Montrer que la courbe paramétrées définie par :

$$\gamma(t) = (3t^3 + 2t^2 - t - 1, 3t^2 + 2t + 1)$$

Possède un point double. Préciser les tangentes en ce point.
Étudier et tracer cette courbe.

Exercice 4.

1. On suppose que le mouvement d'un point $M(t)$ est circulaire, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$ et $\overrightarrow{OM(t)}$ sont orthogonaux.
2. On suppose que le mouvement est à accélération central (l'accélération est colinéaire à $\overrightarrow{OM}(t)$), montrer que l'application $t \mapsto \det(\overrightarrow{OM}(t), \vec{v}(t))$ est constante.
3. On suppose que le mouvement est circulaire et à accélération central, montrer qu'il est uniforme.

Exercice 5.

Étudier et tracer la courbe

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin \frac{t}{3})$$

Exercice 6.

Folium de Descartes

On considère la courbe paramétrée $\gamma(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3})$

1. Que peut-on dire des points $M(t)$ et $M(\frac{1}{t})$? Sur quelle intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Tracer la courbe.

Exercice 7.

Étudier et tracer les courbes paramétrées suivantes :

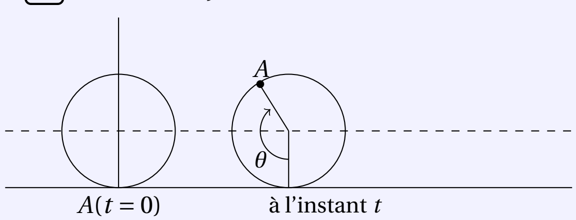
1. $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(\frac{t}{3}))$
2. $\gamma(t) = (\cos(t), \frac{t}{2} + \sin(t))$
3. $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, avec a et b deux réels strictement positifs.
4. $\gamma(t) = (a\cosh(t), b\sinh(t))$, avec a et b deux réels strictement positifs.

Exercice 8.

La cycloïde

Une roue de rayon $R > 0$ roule sans glisser à vitesse constante R sur l'axe (Ox). Soit A le point de la roue qui à l'instant $t = 0$ coïncide avec O.

1. Déterminer la position $M(t)$ du point A à l'instant t.
2. Tracer la trajectoire de A.



Exercice 9.

On suppose le plan muni d'un repère orthonormale direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On souhaite étudier la courbe définie par l'équation polaire $\rho = \cos 3\theta$.
Pour chaque valeur du paramètre θ, on note $M(\theta)$ le point correspondant de la courbe.

1. Exprimer les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_\theta$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$
2. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM(\theta)}$ dans le repère polaire $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$
3. Donner un lien géométrique entre les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$
4. Donner un lien géométrique entre les points $M(\theta)$ et $M(-\theta)$
5. A quel intervalle I peut-on restreindre l'étude pour tracer la courbe.
6. Exprimer le vecteur vitesse $\dfrac{d\overrightarrow{OM(\theta)}}{d\theta}$ dans le repère polaire.
7. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le vecteur vitesse est colinéaire à $\vec{u}_\theta$ resp. à $\vec{v}_\theta$
8. Exprimer le vecteur le vecteur accélération dans le repère polaire.
9. calculer le déterminant des vecteurs vitesse et accélération
10. En déduire que la courbe n'admet aucun point d'inflexion.
11. Tracer la courbe.

Exercice 10.

On considère la courbe en coordonnés polaires par :

$$\rho(\theta) = \tan\theta \tan 3\theta$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de ρ.
2. Préciser les symétries qui permettent de réduire l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}[$.
3. Étudier le signe de ρ sur cet intervalle.
4. Déterminer un développement limité d'ordre 1 de $\rho(\frac{\pi}{6} + h)\sin h$ quand h tend vers 0. En déduire que la courbe admet une asymptote au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.
5. Exprimer $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$ en fonction de $h = \frac{\pi}{2} - \theta$.
6. En déduire les limites $\frac{y}{x^3}$ puis de $y - 3x^2$ quand h tend vers 0. Conclure.
7. Tracer la courbe en faisant apparaître les branches infinies.

Exercice 11.

Étudier et tracer la courbe polaire $\rho = \sin \frac{2\theta}{3}$

Exercice 12.

Étudier et tracer la courbe polaire $\rho = e^{\theta}$

Exercice 13.

On considère la courbe polaire $\rho = \frac{\cos 3\theta}{\cos 2\theta}$

1. Déterminer le domaine de définition de ρ
2. Montrer que l'on peut restreindre le domaine d'étude. On précisera clairement les propriétés permettant cette restriction du domaine d'étude et la symétries de la courbe qui s'en déduisent.
3. Donner le tableau de variations de ρ.
4. Donner une équation cartésienne des tangentes au point de paramètres 0 et $\frac{\pi}{6}$
5. Déterminer la nature des éventuelles branches infinies de la courbe.
6. Tracer la courbe.