Dérivabilités

Exercice 1.

Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonction suivantes sont-elles dérivables ?

1. $x \to \sqrt{x^2 - x^3}$.
2. $x \to \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$
3. $x \to \frac{x}{|x|+1}$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + \frac{n\pi}{6})$

Exercice 3.

Soient n un entier strictement positif, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^n \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que f admet un unique point fixe α, et que $\alpha \in [0, 1]$.
4. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

Exercice 5.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $[0, 1[$ telle que $f'(0) = f(1)$ et $f(0) = 0$, on définit une fonction g sur $[0, 1]$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f(1)$.

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.
2. Montrer que g est dérivable sur $]0, 1[$.
3. En déduire, qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) = e^{ix}$.

1. Vérifier que $f(0) = f(2\pi)$.
2. Montrer que, l'on ne peut pas appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f.

Exercice 7.

Calculer les dérivées $n^{\text{ième}}$ des fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
2. $f(x) = x^2 \ln(x+1)$.
3. $f(x) = x^p e^x$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et il existe $k \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; $|f'(x)| \le k|f(x)|$.

1. Vérifier que $ff' \le kf^2$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = e^{-2k} f^2$. Montrer que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. En déduire que $f = 0$.

Exercice 9.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$.
$$\frac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln(x) \le \frac{1}{x}$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln(n)$$
3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \ne 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 11.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ définie par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$.
2. En déduire les dérivées $n^{\text{ième}}$ de f.

Exercice 12.

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
On suppose que $\forall x\in]a,b[$, $g'(x)\neq 0$.

1. Montrer que $g(a)\neq g(b)$.
2. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice 13.

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^+$ il existe $c\in[0,x]$ tel que $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(c)$.
(Ind : considérer la fonction $g:t\mapsto f(t)-f(0)-tf'(0)-A\frac{1}{2}t^2$, où A est choisi de sorte que $g(0)=g(x)$)
2. On suppose que $f'(0)=0$. Montrer qu'il existe une fonction $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, $\forall x\in\mathbb{R}_+$; $f(x)=g(x^2)$.

Exercice 14.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f, et tracer l'allure de sa représentation graphique.
3. Étudier sur $[0,+\infty[$ la fonction $x\mapsto\dfrac{x}{(1+x)^2}$. En déduire que pour tout $x>1$, $0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{4}$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par son premier terme $x_0=2$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, pour $n\in\mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$. $|u_{n+1}-1|\leq\frac{1}{4}|u_n-1|$.
5. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 15.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(a<b)$ une fonction n-fois dérivable.
Montrer que si $f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$ et $f(b)=0$, alors la fonction $f^{(n)}$ s'annule.

Exercice 16.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}$.

Exercice 17.

Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(x) + x$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est continue sur J.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0.
4. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J.

Exercice 18.

soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Montrer que f est Lipschitzienne.

Exercice 19.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. On considère la fonction $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie par $g(x) = f(\tan(x))$ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = \ell$.
   Montrer que g est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
3. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 20.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $[a, b]$.

1. Dans cette question on suppose que $f'(a)f'(b) < 0$.
   - 1.1 Monter que f n'est pas strictement monotone.
   - 1.2 En déduire que f n'est pas injective.
   - 1.3 Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que si y est un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = y$.