Calculs asymptotiques

Exercice 1.

Donner un équivalant simple des expressions suivantes :

1. $\ln x$ en 1.
2. $\ln(x^2+x)+x$ en $+\infty$.
3. $\dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x-1}}$ en 1.
4. $\ln(2x+3)-\ln(2x+5)$ en $+\infty$.
5. $(x+1)^x - x^x$ en 0.
6. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2.

1. Montrer que $x \sim E(x)$ en $+\infty$, Où $E(x)$ désigne la partie entière de x
2. À t'on $e^{E(x)} \sim e^x$ en $+\infty$?
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{E(x)} - \sqrt{x}) = 0$.
4. Montrer que $e^{\sqrt{E(x)}} \sim e^{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
5. Montrer que $\forall \alpha \in]0,1[$ on a : $e^{(E(x))^\alpha} \sim e^{x^\alpha}$ en $+\infty$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(x) \sim x$ en 0^+.

1. Montrer que $\ln(f(x)) \sim \ln x$ en 0^+.
2. En déduire la limite de $(\ln(1+x))^x$ en 0^+.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $f(x+1)+f(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que $f(x) \sim \frac{1}{2x}$ en $+\infty$.

Exercice 5.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $!\theta(x) \in]0,x[$ tel que $e^{x^2} = 1 + 2x\theta(x)e^{\theta^2(x)}$.
2. Déterminer la limite de $\theta(x)$ en 0^+.
3. Montrer que $\theta(x) \sim \dfrac{x}{2}$ en 0^+.

Exercice 6.

Déterminer un équivalent simple au point considéré des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3}$, en 1
2. $x \mapsto \ln(x)$, en 1
3. $x \mapsto \ln(\cos x)$, en 0
4. $x \mapsto \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$, en $+\infty$
5. $x \mapsto \tan x$, en $\frac{\pi}{2}$
6. $x \mapsto x(e^{\frac{1}{x}} - \cos(\frac{1}{x}))$, en $+\infty$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)$$

1. Montrer que $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{x}{\ln x}$.
2. En déduire la limite de $\left(e^{\frac{f(x)}{x}} - 1\right)\ln x$ en $+\infty$.

Exercice 8.

Déterminer un équivalent simple de u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2. $u_n = e^{\sin\frac{1}{n}} - 1$.
3. $u_n = n\sin\left(\mathrm{sh}^2(\frac{1}{n})\right)$.
4. $u_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.
5. $u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$.
6. $u_n = \mathrm{sh}(\frac{1}{2^n}) - \frac{1}{2^n}$.
7. $u_n = n\ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$
8. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

Exercice 9.

Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0 :

1. $x \mapsto \tan x$ à l'ordre 4
2. $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3
3. $x \mapsto \ln(1+\mathrm{sh}\, x)$ à l'ordre 3
4. $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ à l'ordre 3
5. $x \mapsto \ln(\cos x + \mathrm{e}^x)$ à l'ordre 3
6. $x \mapsto \ln(x^5\sin(x) + 1)$ à l'ordre 4
7. $x \mapsto \arcsin(x)$ à l'ordre 6.

Exercice 10.

Calculer les développements limités suivants au voisinage de $+\infty$

1. $\dfrac{x}{1+x}$ à l'ordre n
2. $\arctan x$ à l'ordre 3
3. $x \sin \dfrac{1}{x}$ à l'ordre 4

Exercice 11.

Étudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\cos^2 \pi x)}{\tan(x-1)}$

Exercice 12.

Calculer le développement limité à l'ordre 3 de

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\sinh(x)}$$

Exercice 13.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} C_{2k}^k x^k + o(x^n)$ au voisinage de 0
2. En déduire un développement limité de la fonction arcsin à tout ordre au voisinage de 0

Exercice 14.

1. Montrer que l'équation $x \sin x = 1$ d'inconnue $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ possède une unique solution α.
2. On note f la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\sin x}{1 - x\sin x}$ définie sur $]-\alpha, \alpha[$. Montrer que f est bijective de $]-\alpha, \alpha[$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer

Exercice 15.

On note f la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1-\cos x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$

1. Montrer que f est prolongeable en 0
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la position relative du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0

Exercice 16.

Calculer le développement limité à l'ordre 10 de $x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

Exercice 17.

Soit $f : x \mapsto (1+x)e^{\frac{1}{x}}$

1. Donner le développement limité de $x :\mapsto f(x) - x$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$
2. En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f
3. Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote au voisinage de $+\infty$

Exercice 18.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1-x^2}$

1. Montrer que f admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. En déduire $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 19.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{\ln(1+x)\sin(x)}$$