

Espaces vectoriels cas général

Exercice 1.

Les parties suivantes sont-elles des sous espaces vectoriels de \mathbb{K}^n

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x - y = y - z + t = 0\}$,

2. $F = \{(x, y, z) \mid x + y = 0, y + z = 0\}$

3. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + y - z = 1\}$

4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid xy = z\}$

5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x = 0\}$

6. $F = \{(x, x + y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}$

Exercice 2.

Les parties suivantes sont-elles des sous espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. $F = \{f \in E \mid f \text{ est } \pi\text{-périodique}\}$

2. $F = \{f \in E \mid f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}\}$

3. $F = \{f \in E \mid f(0) = 1\}$

4. $F = \{f \in E \mid f(0)f(1) = 0\}$

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{K}_n[X]$.

1. Montrer que la famille $(1, (X-1), \dots, (X-1)^n)$ est une base de E_n .

2. Montrer que $F := \{P \in E \mid (X-1)^2 \text{ divise } P\}$ est un sous espace vectoriel de E .

3. En déduire que les deux sous espaces vectoriels E_1 et F sont supplémentaires dans E .

Exercice 4.

Soit F défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}\}$$

On pose $u = (1, -1, 0, 0)$ et $v = (0, 0, 1, -1)$, et $G = \text{Vect}(u, v)$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 .

2. Déterminer une famille génératrice de F (formée par deux vecteurs).

3. Montrer que la somme $F + G$ est directe.

4. Démontrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 5.

On pose $u = (1, 1, -1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 6.

1. Vérifier que $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Soient F et G définis par :

$$F = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}, \quad G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } [0, 1]\}$$

- 2.1 Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.
- 2.2 Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $v_i = \sum_{k=1}^i u_k$. Montrer que si la famille (u_1, \dots, u_n) est libre alors (v_1, \dots, v_n) est libre.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z)$, et notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\text{Im } f$.

Exercice 9.

Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$.

1. Montrer que E_λ est un sous espace vectoriel de E .
2. Calculer $f(x)$ pour $x \in E_\lambda$.
3. Montrer que $f(E_\lambda) = E_\lambda$

Exercice 10.

Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme, on rappelle que f^2 est l'application $f \circ f$.

1. Vérifier que f^2 est linéaire.
2. Montrer que $\ker f \cap \text{Im } f = f(\ker f^2)$

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Montre que $\ker f = \ker f^2$ si, et seulement si, $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$.
2. $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ si, et seulement si, $\ker f + \text{Im } f = E$.

Exercice 13.

Soit $\varphi : \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = f'$, où $a < b$ sont des réels.

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.
3. L'application φ est-elle injective, surjective ?

Exercice 14.

Soit f un endomorphisme nilpotent de E , d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$, i.e $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Justifier qu'il existe $v \in E$ tel que $f^{p-1}(v) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ est libre.
3. Montrer que la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{p-1})$ est libre.
4. Un exemple d'endomorphisme nilpotent : Soit $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par $f(x, y, z) = (0, x, y)$. Calculer f^2 et f^3 .

Exercice 15.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{K}^3 et $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(e_1) = (1, 1, 1, -1), \quad f(e_2) = (-1, 0, 1, 3), \quad f(e_3) = (2, 0, -1, 1)$$

1. Calculer $f(x, y, z)$, pour $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$.
2. Déterminer une base de $\ker f$.
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.

Exercice 16.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{K}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{K}^3 définie par :

$$f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_1 + e_2$$

1. Calculer $f^2(e_i)$, puis $f^3(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$.
2. En déduire que $f^3 = 0$.
3. Une deuxième méthode pour calculer f^3 (calcul explicite) :
 - 3.1 Calculer $f(x, y, z)$, pour $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$.
 - 3.2 Calculer $f^2(x, y, z)$, pour $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. En déduire que $f^3 = 0$.
4. Soit g , l'endomorphisme $g = f - \text{Id}_E$.
 - 4.1 Montrer que $g^3 + 3g^2 + 3g + \text{Id}_E = 0$
 - 4.2 En déduire que g est un isomorphisme et déterminer g^{-1} en fonction de g .

Exercice 17.

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, \mathcal{P} l'ensemble des application paires et \mathcal{I} celui des applications impaires (de \mathbb{R} vers \mathbb{R}).

1. Vérifier \mathcal{P} et \mathcal{I} sont des sous espaces vectoriels de E
2. Montrer que la somme $\mathcal{P} + \mathcal{I}$ est directe.
3. Soit $f \in E$, on pose $f_{\mathcal{P}}(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_{\mathcal{I}}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
 - 3.1 Montrer que $f_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$ et $f_{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}$.
 - 3.2 Calculer $f_{\mathcal{P}} + f_{\mathcal{I}}$.
4. En déduire que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
5. Pour $f \in E$, déterminer $p_{\mathcal{P}, \mathcal{I}}(f)$ la projection de f sur \mathcal{P} parallèlement à \mathcal{I} , et $p_{\mathcal{I}, \mathcal{P}}(f)$ la projection de f sur \mathcal{I} parallèlement à \mathcal{P} .
6. Exemple : Déterminer $p_{\mathcal{P}, \mathcal{I}}(\exp)$ et $p_{\mathcal{I}, \mathcal{P}}(\exp)$.

Exercice 18.

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $p + q$ est un projecteur alors

$$\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q \quad \text{et} \quad \text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$$