Limites et continuités

Exercice 1.

Étudier les limites fonctions suivantes :

1. $\frac{x\sin a - a\sin x}{x-a}$ en a , $a\in\mathbb{R}$.
2. $\frac{e^{ix}-e^{ia}}{x-a}$ en a , $a\in\mathbb{R}$.
3. $\frac{e^{ix}+[x]}{x^2}$ en $+\infty$.
4. $\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$ en 1.
5. $\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{\sin\pi x}$ en 1.
6. $x^\lambda e^{\alpha x}$ en $+\infty$, $\lambda>0$ et $\alpha<0$.

Exercice 2.

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes : $f: x\mapsto x\sqrt{x}[\frac{1}{x}]e^{ix}$, $g: x\mapsto x[\frac{1}{x}]$

Exercice 3.

Étudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$: $x\mapsto x[\frac{1}{x}]$, $g: x\mapsto \frac{1}{x^2}[x]$

Exercice 4.

Étudier la continuité de la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

Exercice 5.

Montrer que les deux fonctions sin et cos n'admettent pas de limites en $\pm\infty$.

Exercice 6.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction périodique, et admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 7.

Soient $f,g: I\to\mathbb{R}$ deux fonctions continue, montrer que $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur I.

Exercice 8.

Soit k un réel de l'intervalle $[0,1[$ notons par I l'intervalle $[0,+\infty[$. Soit $f : I \to I$ une application $k-$Lipschitzienne c'est-à-dire pour tout $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq kx + f(0)$.
3. Quelle est la limite de $x \mapsto f(x) - x$ en $+\infty$.
4. Montrer que f admet un unique point fixe α.
5. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que u_n converge vers α.

Exercice 9.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon.
Montrer que f est discontinue en tout point.

Exercice 10.

Soient $a, b \in \mathbb{R}, (a < b)$,
$f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
Ind : on pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$...

Exercice 11.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Z}$.
Montrer que f est constante.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(2x) = f(x)$.
Montrer que f est constante.
Ind : Exprimer $f(\frac{x}{2^n})$...

Exercice 13.

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.

1. Soit $x > O$. Montrer que pour tout $h \geq 0$
$$\frac{h}{h} f(x) \geq f(x+h) - f(x) \geq 0$$
2. Soit $x > 0$. Montrer que pour tout $h \geq 0$ tel $x - h > 0$
$$hf(x) \geq x(f(x) - f(x-h)) \geq 0$$
3. En déduire que f est continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 14.

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [a,b]$, $g(x) < f(x)$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $\forall x \in [a,b]$, $\alpha + g(x) < f(x)$.
2. On suppose de plus que $\forall x \in [a,b]$, $g(x) > 0$, monter qu'il existe $k > 1$, tel que $\forall x \in [a,b]$, $kg(x) < f(x)$.

Exercice 15.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec f continue et g bornée.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue tel que les deux limites $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)|$ existent et sont finies.
Montrer que f est bornée.
Ind : Montrer que f est bornée dans un voisinage de $+\infty$ et dans un voisinage de $-\infty$, puis ....

Exercice 17.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Montrer que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 18.

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(0)=f(1)$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Pour $0\leq k\leq n-1$ on pose
   $\alpha_k=f(\frac{k}{n})-f(\frac{k+1}{n})$.
   Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k$.
2. Montrer qu'il existe $c\in[0,1-\frac{1}{n}]$, tel que $f(c)=f(c+\frac{1}{n})$

Exercice 19.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall x\in I\,,\,|f(x)|=1$.
Montrer que $f=1$ ou $f=-1$

Exercice 20.

Trouver toutes les fonctions continues $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in[0,1]\,,\,f(x^2)=f(x)$

Exercice 21.

Soient $f,g:\mathbb{R}\to$ deux applications continues sur $\mathbb{R}$.

1. Soit D une partie dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que si pour tout $x\in D$, $f(x)=g(x)$ alors $f=g$.
2. Montrer que si pour tout $x\in\mathbb{Q}$, $f(x)=g(x)$ alors $f=g$

Exercice 22.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ non identiquement nulle,continue en 0 et telle que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\;\; f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1. Montrer que $f(0)=0$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{Z}\,,\,f(n)=nf(1)$.
4. Montrer que $\forall r\in\mathbb{Q}\,,\,f(r)=rf(1)$
5. Montrer que $f=f(1)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 23.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. En déduire la limité de $\dfrac{f(\sin(x^2))}{x}$ en $+\infty$

Exercice 24.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = n^2 f(x)$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = r^2 f(x)$.
5. Conclure.

Exercice 25.

pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers $\frac{1}{2}$.