Matrices

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$.
2. Montrer que A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Exercice 2.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} \text{ch}(x) & \text{sh}(x) \\ \text{sh}(x) & \text{ch}(x) \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 3.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. $(M - I_3)(M + 3I_3)$.
2. En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ / \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ AM = MA\}$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Dans cette question $n = 2$. Montrer que $\mathscr{C} = \text{Vect}(I_2)$. (Ind : utiliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.)

Exercice 6.

Vérifier que chacune de ces applications est linéaire de E dans F ,et donner les matrices associées relativement aux bases canoniques de E et F :

1. $f(x,y,z) = (2x+z, x+2y-z, z, 3y-4z)$, $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^4$
2. $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$, $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^3$
3. $f(A) = {}^tA$, $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
4. $f(x,y,z,t) = (x+2y, z-t, x+2t)$, $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^3$

Exercice 7.

Déterminer les applications linéaires f et g canoniquement associées aux matrices A et B respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Quelle est la matrice de $g \circ f$ et de $f \circ g$ relativement aux bases canoniques.

Exercice 8.

On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
   Pour chacune de ces valeurs déterminer un vecteur X tel que $AX = \lambda X$ et dont la deuxième composante vaut 1.
2. On pose $e_1 = (3,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$.
   Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice B de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3), exprimer une relation entre A,B et P.
5. Calculer B^n, puis A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$
   - 1.1 Calculer, B^2, B^3, en déduire B^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
   - 1.2 Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites de nombres réels telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & 2v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & 2w_n \end{array}\right.$$
   Donner l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice 10.

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Où x, y et $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 11.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(A - 6I_3)(A^2 - 3I_3) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^n = P_n(A)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer P_n en fonction de n, et en déduire une expression de A en fonction de n.

Exercice 12.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t XX = 0$, montrer que $X = 0$.
2. Montrer que $\ker A = \ker {}^t AA$.
3. En déduire que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t AA$

Exercice 13.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

Notons $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ la **`trace`** de A.

1. Montrer qu'ils existent deux vecteurs colonnes U et V telle que $A = U\,{}^tV$.
2. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = {}^tVU$.
3. Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$.
4. Soit $F = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = Tr(A)X\}$ et $G = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0\}$.

   4.1 Justifier que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

   4.2 Donner la dimension de G.

   4.3 Montrer que si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, alors $F \cap G = \{0\}$ et que F est une droite vectoriel, et montrer dans ce cas que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}$

Exercice 14.

Soit $E)\mathbb{K}_n[X]$, et f l'endomorphisme de E définie pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ par $f(P) = P(X+1)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique. On note A cette matrice.
3. Justifier que A est inversible, et donner son inverse.

Exercice 15.

Calculer le rang de la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2n-1 \\ n & n+1 & \dots & 2n \end{pmatrix}$

Exercice 16.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 (Matrice de rotation hyperbolique)**.**

Pour $t \in \mathbb{R}$ on note r_t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$, une telle application s'appelle une **rotation hyperbolique**.

1. Déterminer l'endomorphisme r_0.
2. Calculer $R_t R_{-t}$, et en déduire que r_t est un automorphisme.
3. Montrer que la composée de deux rotations hyperboliques est une rotation hyperbolique.
4. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$ **hyperboloïde a deux nappes**. Montrer que $r_t(H) = H$.

Exercice 18.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables.

1. Montrer que A est inversible si, et seulement si, B l'est.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables.
3. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.
   ☞ Si $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ est la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_d A^d$.

Exercice 19.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - 3.1 Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   - 3.2 On pose $D = P^{-1}AP$. Déterminer la matrice D, en déduire l'expression de D^n, en fonction de n.
   - 3.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   - 3.4 En déduire l'expression de A^n, en fonction de n.
4. En utilisant les résultats précédentes, donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 20.

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension n, p un projecteur de E. Montrer que $rg(p) = \text{tr}(p)$. On pourra utiliser une base adaptée à la décomposition $E = \ker p \oplus \text{Im}\, p$

Exercice 21.

On considère les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} , \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, puis déterminer des réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_2.
3. Montrer que P est inversible et préciser P^{-1}.
4. Montrer que $AP = PD$, où D est une matrice diagonale a déterminer.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$
6. En déduire l'expression de la matrice A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et V un vecteur collone non nul tel que $AV = \lambda V$.
   - 3.1 Calculer B^2V en fonction de λ et V.
   - 3.2 Montrer que $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$