Primitives et Intégrales

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$
3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx.$
4. $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+i}\,dx$

Exercice 2.

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
2. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}}$
3. $x \mapsto \frac{x^3}{x^2+4x+5}$
4. $x \mapsto \operatorname{argsh}(x)$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2(t)}\,dt\,;\ (x=\tan(t))$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos(t)}\,;\ x=\sin(t)$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}+1}\,,\ x=\sqrt{t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin(t)+\cos(t)}\,,\ x=\tan(\tfrac{t}{2})$
5. $\displaystyle\int_1^e \ln(t)\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^1 e^t\cos(t)\,dt$

Exercice 4.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln x.$
2. $x \mapsto \arctan x.$
3. $x \mapsto \operatorname{argtanh} x.$
4. $x \mapsto e^x \sin x.$
5. $x \mapsto \operatorname{ch}(x)\cos(x).$
6. $x \mapsto \sqrt{1+x^2}.$
7. $x \mapsto \sqrt{x^2-1}.$
8. $x \mapsto \dfrac{e^x}{2+e^x}.$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}.$
10. $x \mapsto \sin(x)e^{\cos(x)}.$
11. $x \mapsto x^2e^x.$
12. $x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}.$
13. $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}.$

Exercice 5.

Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. calculer les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt\ ,\ \int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin(mt)dt,\ \int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt$$

Exercice 6.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{1+\tanh^2(\frac{x}{2})}{1-\tanh^2(\frac{x}{2})}$.
2. En déduire les primitives de $\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$

Exercice 8.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que la fonction : $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)dt$ est Lipschitzienne.
2. Si de plus f est de classe $\mathscr{C}^1$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0$

Exercice 9.

Déterminer une primitive de $x \mapsto e^{e^x+x}$.

Exercice 10.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt$

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = J$.
2. Calculer $I + J$, en déduire les valeurs de I et J.

Exercice 11 (Lemme de Grönwall)**.**

Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues positives et $c > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\ ,\ f(x) \leq c + \int_0^x f(t)g(t)dt$$

On pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$;

$$\int_0^x \frac{f(t)g(t)}{c + h(t)} dt \leq \int_0^x g(t)dt$$

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$;

$$f(x) \leq c \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

Exercice 12.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

1. Déterminer une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(x)$.

Exercice 13.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}$.

1. Déterminer la limite de I_n.
2. Montrer que $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.
3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   - 3.1 Montrer que $S_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} I_n$.
   - 3.2 En déduire que la suite $(S_n)_n$ et convergente et déterminer sa limite.