Les nombres réels

Exercice 1.

1. Soient x un nombre réels strictement positif. Montrer que $2 \leq x + \frac{1}{x}$.
2. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Montrer que $2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$
3. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.Montrer que :

$$n^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i})$$

Exercice 2.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $2xy \leq (x+y)^2$.
2. Montrer que $4xy \leq (x+y)^2$.
3. Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Exercice 3.

Soient x et y deux nombres réels avec $x \neq 0$ et $|x-y| < |x|$. Montrer que y est non nul et que x a le signe de y.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tous réels x, y on a :

$$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$$

2. Montrer que pour tout entier relatif on a :

$$\left[\frac{n+n}{2}\right] + \left[\frac{n-m+1}{2}\right] = n$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2] = 4n+1$$

Indication : on pourra montrer que $[2\sqrt{n(n+1)}] = 2n$.

Exercice 5.

Soit x un nombre réel et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{d}{10^n} \leq x < \dfrac{d+1}{10^n}$.
$\frac{d}{10^n}$ s'appelle la valeur décimale approchée de x à $\frac{1}{10^n}$ près par **défaut**, et $\frac{d+1}{10^n}$ celle par **excès**.

Exercice 6.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} [x + \frac{i}{n}] - [nx]$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f(x) = 0$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} [x + \frac{i}{n}] = [nx]$

Exercice 7.

Déterminer (lorsqu'il existe) $\inf A$, $\sup A$ dans les cas suivants :

1. $A = [0, 1[\cup \{2\}$
2. $A =]-1, 1[\cup [2, 3]$
3. $A = \mathbb{Q} \cap]0, 1]$
4. $A = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$

Exercice 8.

Montrer que

$$A = \{\frac{nm}{(n+m)^2} \ , \ n, m \in \mathbb{N}^*\}$$

admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice 9.

Soit $A = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ / \ p, q \in \mathbb{N}^*\}$

1. Montrer que A est bornée.
2. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$

Exercice 10.

Soit $A=\{\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{n}\ /\ n\in\mathbb{N}^*\}$

1. Montrer que A est borné.
2. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$

Exercice 11.

Soit $A=\{(-1)^n+\frac{1}{n+1}\ /\ n\in\mathbb{N}\}$.
Montrer que A est bornée, déterminer $\inf A$ et $\sup A$

Exercice 12.

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Comparer $\inf A$ et $\inf B$, puis $\sup A$ et $\sup B$

Exercice 13.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée, on note $\alpha=\sup A$. On suppose que $\alpha\notin A$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon>0$, l'intervalle $]\alpha-\varepsilon,\alpha[$ contient une infinité d'éléments de A.

Exercice 14.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides, telles $\forall x\in A$ et $\forall y\in B$ on ait $x\leq y$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure que $\sup A\leq\inf B$.
2. Montrer que $\sup A=\inf B$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $a\in A$ et $b\in B$ tel que $b-a\leq\varepsilon$.

Exercice 15.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées, on note
$A+B=\{a+b\ /\ a\in A, b\in B\}$.
Montrer que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

Exercice 16.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides.

1. Montrer que si A et B sont majorées, alors $A \cup B$ est majorés et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
2. Montrer que si A et B sont minorées, alors $A \cup B$ est minorée et que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

Exercice 17.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée.
On note $B = \{|x - y| \ / \ x, y \in A\}$
Montrer que B admet une borne supérieure et $\sup B = \sup A - \inf A$

Exercice 18.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante.
On pose $A = \{x \in [0,1] \ / \ x \leq f(x)\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure α.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$

Exercice 19.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto [x]$ est croissante.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
   - 2.1 Si $x \notin \mathbb{Z}$; $[-x] = -[x] - 1$,
   - 2.2 Si $x \in \mathbb{Z}$, $[-x] = -x$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto x - [x]$ est périodique.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $\alpha = [x + y] - [x] - [y]$.
   Montrer que $\alpha^2 = \alpha$.

Exercice 20 (Nombres dyadiques)**.**

On appelle nombre dyadique tout nombre réel de la forme $\frac{m}{2^n}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.