Séries numériques

Exercice 1.

Déterminer la nature de la série de terme générale u_n , lorsque u_n est égale à :

1. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$
2. $\frac{n^2}{n^3+2}$
3. $\dfrac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+2}}$
4. $\frac{2}{(\ln n)^n}$
5. $\frac{1}{(\ln n)^2}$
6. $e^{\sqrt{n}}$
7. $\frac{1}{\ln(n^2+n+2)}$
8. $1-\cos\frac{1}{n}$

Exercice 2.

On considère les deux suites $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que $u_n \sim v_n$.
2. Étudier la nature les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Exercice 3.

Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs convergente. Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est aussi convergente

Exercice 4.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes.
$\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$

Exercice 5.

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, et on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$.
3. Montrer de même que $\lim_{n\to+\infty} nu_{2n+1} = 0$
4. En déduire que $nu_n \to 0$.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{u_n+1}$
Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exercice 7.

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{u_1+...+u_n}$
Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 8.

1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

   On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
2. Montrer que

   $$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$
3. Déterminer un équivalent de R_n
4. Donner la nature de la série $\sum R_n$

Exercice 9 (Séries de Bertrand)**.**

Hellow Bertrand !
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ et on s'intéresse à l'étude de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente. Un grand merci à Riemann.
2. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

Exercice 10.

Soit $\sum z_n$ une série complexe convergente.Montrer que la série $\sum \frac{z_n}{n}$ converge.
Ind : Établir $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N+1}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} z_n$

Exercice 11 (Règle de Raabe-Duhamel).

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .Montrer que :
   Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge
   Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge
2. Soient β un réel non nul $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$$

   2.1 Soit α un réel strictement positif et $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ .Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta-\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$

   2.2 Montrer que si $\beta > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge

   2.3 montrer que si $\beta < 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge
3. Déterminer la nature des séries de terme général u_n :

   3.1 $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

   3.2 $u_n = \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{b(b+1)...(b+n-1)}$ Où a et b sont des réels qui ne sont pas des entiers négatifs

Exercice 12.

Étudier la convergence de la série de terme générale $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 13.

Soients $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq v_n \leq w_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge

Exercice 14.

1. Donner un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leq 1$.
2. Donner un équivalent du reste de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

Exercice 15.

Convergence et calcul de la somme de la série suivante $\sum \ln(1 - \frac{1}{n^2})$.

Exercice 16 (Série de Riemann : cas complexe).

Soit $z \in \mathbb{C}$, pour $n \geq 1$ on pose $u_n = \dfrac{1}{n^z}$. Montrer que la série $\sum\limits_n u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Exercice 17.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n - u_{n+1}|$ convergent. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 18.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de ζ.
2. À l'aide des encadrements par des intégrales, montrer que $\zeta(x) \sim_{1^+} \dfrac{1}{x-1}$.