Suites numériques

Exercice 1.

Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Si une suite positive est non majorée elle tend vers $+\infty$.
2. Toute suite convergente est bornée .
3. Toute suite bornée est convergente.
4. Toute suite monotone est convergente.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, elle est stationnaire.

Exercice 3.

Étudier les limites des suites suivantes :
$\cos\frac{n}{n!}$; $\cos(n)\sin(\frac{1}{n})$; $\frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+n}$; $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=-1$ et $\forall n \in N$, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

1. Montrer que cette suite est bien définie .

   On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. Vérifier que $\sqrt{1+\alpha}=\alpha$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le u_n \le \alpha$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
5. En déduire que $(u_n)_n$ et convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5.

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique
Montrer que si les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ sont convergentes, alors la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 6.

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x)=x+\sqrt{x}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique $x_n\in\mathbb{R}_+$ tel que $x_n+\sqrt{x_n}=n$. Déterminer x_0.
3. Montre que la suite $(x_n)_n$ est strictement croissante.
4. En déduire que $(x_n)_n$ admet une limite, que l'on déterminera.
5. Montrer que $\lim_n \frac{x_n}{n}=1$.

Exercice 7.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $\forall n,m\in\mathbb{N}^*\ 0\leq u_{n+m}\leq \frac{n+m}{nm}$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge.

Exercice 8.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose :
$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n.n!}$. Montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 9.

Montrer que la suite $(\sin n)_n$ diverge.

Exercice 10.

Soit $a>0$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=a$ et $u_{n+1}=u_n+u_n^2$

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$.
2. En déduire la limite de $(u_n)_n$.
3. Démontrer que :
   $\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_n^2\leq u_{n+1}$ et $u_{n+1}+1\leq (u_n+1)^2$.
4. Démontrer que :
   $\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_n+1\leq (1+u_0)^{2^n}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=u_n^{\frac{1}{2^n}}$ et $w_n=(u_n+1)^{\frac{1}{2^n}}$.
   - 4.1 Justifier ces définitions et montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\,,\ v_n>0$ et $w_n>0$.
   - 4.2 Démontrer que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent.
   - 4.3 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{w_n}=1$.
   - 4.4 Montrer que les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 11.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite.

Exercice 12 (Comparaison logarithmique).

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à termes strictement positifs, telles que à partir d'une certain rang n_0 ; $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
Montrer que la suite $(\frac{u_n}{v_n})_n$ est bornée .
Application : Montrer que pour tout $a > 1$, la suite $(\frac{a^n}{n!})_n$ tend vers 0.

Exercice 13.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de $(S_n)_n$.

Exercice 14.

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer que si $0 < a \leq b$, alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
3. Soient u_0 et v_0 deux réels strictement positifs tels que $u_0 < v_0$, on définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de la façon suivante $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$
   - 3.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq v_n$.
   - 3.2 Montrer que les deux suites $(u)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 15.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que la suite $(u_n v_n)_n$ converge de limite 1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.

Exercice 16.

Déterminer la suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant : $4u_{n+2} - 8u_{n+1} + 3u_n$ avec $u_0 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Donner une expression simple de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 17.

Donner l'expression des suites réelles récurrente suivantes :

1. $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
2. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.