

Systemes linéaires

Exercice 1.

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

Exercice 2.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1.
$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 3 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + y + 2z + 3t = 2 \\ 3x + 3y + z + t = 4 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + y - 2z + t = \alpha \\ x + 2y + 3t = 2\alpha \\ x - 2y - z = 2 \\ x + 2z - t = \alpha + 2 \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 3.

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système ait au moins une solution ?
2. Est-ce que ce système peut avoir une unique solution ?

Exercice 4.

Résoudre le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} xyz = 2 \\ \frac{xz}{y} = 1 \\ \frac{x^2}{yz^3} = 4 \end{cases}$$

Où x, y et z sont des réels strictement positifs.

Exercice 5.

Soit α un paramètre réel. On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y - z + \alpha t = 1 \\ x + \alpha y - z - t = -\alpha \\ \alpha x + y + z + t = -1 \\ x - y + \alpha z - t = -\alpha \end{cases}$$

1. Échelonner ce système, pour quelle valeur de α ce système admet-il une unique solution ? Calculer cette solution en fonction de α dans ce cas.
2. Sinon, vérifier si le système est compatible ou non et, dans l'affirmative, donner l'ensemble de ses solutions.

Exercice 6.

Soit (T) un système linéaire à p inconnus et n équations, et notons (T_0) le système linéaire homogène associé à (T) .

Pour $x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^p$, on note $x + y$ (resp. $x - y$) l'élément de \mathbb{K}^d définie par $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$ (resp. $x - y := (x_1 - y_1, \dots, x_p - y_p)$).

On suppose que (T) admet une solution particulière $X_0 \in \mathbb{K}^p$.

1. Montrer que $Y \in \mathbb{K}^p$ est solution de (T) si, et seulement si, $Y - X_0$ est solution de (T_0) .
2. En déduire que $s(T) = X_0 + s(T_0)$ où $X_0 + s(T_0) := \{X_0 + X, X \in s(T_0)\}$.