

## Systemes lineaires

### Exercice 1.

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

### Exercice 2.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. 
$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 3 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + y + 2z + 3t = 2 \\ 3x + 3y + z + t = 4 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x + y - 2z + t = \alpha \\ x + 2y + 3t = 2\alpha \\ x - 2y - z = 2 \\ x + 2z - t = \alpha + 2 \end{cases}$$
  
avec  $\alpha \in \mathbb{R}$

### Exercice 3.

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

où  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres  $a, b$  et  $c$  pour que le système ait au moins une solution ?
2. Est-ce que ce système peut avoir une unique solution ?

### Exercice 4.

Résoudre le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} xyz = 2 \\ \frac{xz}{y} = 1 \\ \frac{x^2}{yz^3} = 4 \end{cases}$$

Où  $x, y$  et  $z$  sont des réels strictement positifs.

**Exercice 5.**

Soit  $\alpha$  un paramètre réel. On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y - z + \alpha t = 1 \\ x + \alpha y - z - t = -\alpha \\ \alpha x + y + z + t = -1 \\ x - y + \alpha z - t = -\alpha \end{cases}$$

1. Échelonner ce système, pour quelle valeur de  $\alpha$  ce système admet-il une unique solution ? Calculer cette solution en fonction de  $\alpha$  dans ce cas.
2. Sinon, vérifier si le système est compatible ou non et, dans l'affirmative, donner l'ensemble de ses solutions.

**Exercice 6.**

Soit  $(T)$  un système linéaire à  $p$  inconnus et  $n$  équations, et notons  $(T_0)$  le système linéaire homogène associé à  $(T)$ .

Pour  $x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ , on note  $x + y$  (resp.  $x - y$ ) l'élément de  $\mathbb{K}^d$  définie par  $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$  (resp.  $x - y := (x_1 - y_1, \dots, x_p - y_p)$ ).

On suppose que  $(T)$  admet une solution particulière  $X_0 \in \mathbb{K}^p$ .

1. Montrer que  $Y \in \mathbb{K}^p$  est solution de  $(T)$  si, et seulement si,  $Y - X_0$  est solution de  $(T_0)$ .
2. En déduire que  $s(T) = X_0 + s(T_0)$  où  $X_0 + s(T_0) := \{X_0 + X, X \in s(T_0)\}$ .