Arithmétique des entiers

Exercice 1.

Soit n un entier ≥ 1.

1. Effectuer la division euclidienne de n^2+1 par $n+1$.
2. Déterminer les entiers $n \geq 1$, tel que $n+1$ divise n^2+1.

Exercice 2.

Montrer que pour tout entier naturel n, 13 divise $4^{2n+1}+3^{n+2}$.

Exercice 3.

Soient a et b deux entiers relatifs, montrer que si a^2+b^2 est divisible par 7, alors a et b sont divisible par 7.

Exercice 4.

Soient a et b deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.
2. Montrer que $\text{pgcd}(a+b, a^2+b^2)$ vaut 1 ou 2.

Exercice 5.

Soit p un nombre premier ≥ 5.
Montrer que 24 divise p^2-1

Exercice 6.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les deux entiers n^3+n et $2n^2+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 7.

Soit p un entier naturel premier.
Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 8.

résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équation suivantes :

1. $3x+4y=1$;
2. $8x+20y=12$;
3. $9x+12y=8$;
4. $ax+by=c$, avec $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

Exercice 9.

Soit $a,b\in\mathbb{Z}^*$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

1. Donner le reste de la division euclidienne de 2^a-1 par 2^b-1 en fonction de r.
2. En déduire le pgcd de 2^a-1 et 2^b-1.

Exercice 10.

Soit n un entier pair. Montrer que $n+1$ divise $\sum_{k=1}^{n} k^{n+1}$.

Exercice 11 (Théorème chinois)**.**

Soit $p,q\in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

1. Montrer qu'il existe deux entiers $p_1,q_1\in\mathbb{Z}$ tel que $pp_1=1[q]$ et $qq_1=1[p]$.
2. Soit $a_1,a_2\in\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $x\in\mathbb{Z}$ tel que $x=a_1[p]$ et $x=a_2[q]$.
3. En déduire que l'application $\varphi:\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ définie par $\varphi(\bar{x})=(\dot{x},\hat{x})$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 12.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(a_n,b_n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 13 (Nombres de Fermat)**.**

Soient a et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer que si a^m+1 est premier, alors $a=2$ ou m est un nombre pair .
2. Montrer que m s'écrit d'une manière unique sous la forme $m=p2^n$ avec p impair et $n\in\mathbb{N}$.
3. Montrer que si 2^m+1 est premier alors m est une puissance de 2.
   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $F_n=2^{2^n}+1$ **Nombre de Fermat**.
4. Montre que si m et$n$ sont deux entiers distincts et ≥ 2, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
5. En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 14.

1. Soit a un entier >1 et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si a^n-1 est premier alors $a=2$.
   Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $M_n=2^n-1$ **Nombre de Mersenne**
2. Montrer que si M_n est premier alors n est premier.

Exercice 15 (Théorème de Wilson)**.**

Soit p un entier ≥ 2 ; on se propose de démontrer le théorème de **Wilson** :
p est premier si, et seulement si, $(p-1)!=-1\ [p]$.

1. Un exemple : Montrer que $2!=-1\ [3]$ et $4!=-1\ [5]$.
2. Dans cette question on suppose que p est premier, et on pose $A_p=\{1,\dots,p-1\}$.
   - 2.1 Montrer que pour tout $k\in A_p$, il existe un unique $l\in A_p$ tel que $kl=1\ [p]$.
     Soit $i_p : A_p\to A_p$ l'application définie par $i_p(k)=l$ où l est l'unique élément de A_p tel que $kl=1\ [p]$, ainsi pour $k\in A_p$, $i_p(k)$ est l'unique élément de A_p tel que $ki_p(k)=1\ [p]$.
   - 2.2 Calculer $i_p(1)$ et $i_p(p-1)$.
   - 2.3 Montrer que $i_p\circ i_p=\mathrm{Id}_{A_p}$.
   - 2.4 Résoudre dans A_p, l'équation $i_p(k)=k$.
   - 2.5 en déduire que $(p-1)!=-1\ [p]$.
3. Démontrer le théorème de Wilson.

Exercice 16.

Soit G un groupe fini.
Montrer que si l'ordre de G est premier , alors G est cyclique.

Exercice 17.

Soit G un groupe abélien fini de neutre e.

1. Montrer que pour tout $x \in G$;
   $\{k \in \mathbb{Z} \,/\, x^k = e\} = o(x)\mathbb{Z}$.
2. Soit $x, y \in G$ tels que $o(x)$ et $o(y)$ soient premiers entre eux. Montrer que $o(xy) = o(x)o(y)$.
3. soit x, y deux éléments de G. Montrer que $o(xy) = o(x) \vee o(y)$.

Exercice 18.

Soit n un entier naturel non nul, et $p_1, p_2, \dots, p_r$ les diviseurs premier de n.
On note $d(n)$ le nombre de diviseur de n.

1. Exprimer $d(n)$ en fonction des valuation p-adiques.
2. Montrer que $\prod_{d/n} d = \sqrt{n^{d(n)}}$.

Exercice 19 (CCP-2012 MP)**.**

1. Déterminer le plus petit entier naturel non nul p tel que $3^p = 1$ [11].
2. En utilisant les congruences modulo 11, démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

Exercice 20.

Soit $\mathbb{M}$ l'ensemble des nombres premier de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$; $\mathbb{M} = \{p \,/\, p$ premier et il existe $k \in \mathbb{N}$, $p = 4k+3\}$

1. Montrer que $\mathbb{M}$ est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que $\mathbb{M}$ est fini, et on l'écrit $\mathbb{M} = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$. On pose $n = 4p_1p_2\dots p_r - 1$. Montrer que n admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. En déduire que $\mathbb{M}$ est infini.

Exercice 21 (Un tour de magie)**.**

On considère le nombre premier $p = 5$. Élever au carré , ajouter 11 , diviser par 24. Quel est le reste dans la division ? De même pour $p = 31$. De même pour nombre premier de votre choix. Est-ce un hasard ?