Nombres complexes

Exercice 1.

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}^*$.
2. $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}$.
3. $(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i})^{20}$.
4. $(\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i})^{25}$.
5. $1+e^{i\theta}$.
6. $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$.
7. $\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$.

Exercice 2.

On pose $u = -3+3i$.

1. Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $zu = 6\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.
2. En déduire $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

Exercice 3.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

Exercice 4.

Soit z un nombre complexe de module 1 différent de 1, montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5.

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > 1$. Montrer que si $|1+z| \geq 1$ alors $|1+\lambda z| > 1$.

Exercice 6.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 7.

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$.
Montrer que $|\sum_{k=1}^{n} z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ si, et seulement si, $\arg z_1 = \arg z_2 = \dots = \arg z_n \quad [2\pi]$

Exercice 8.

1. Montrer que :
   $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x = 0$.
3. En déduire la valeur de $\sin\frac{\pi}{5}$ puis $\sin\frac{2\pi}{5}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x = \frac{1}{2}$.
5. En déduire la valeur de
   $\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\sin\frac{19\pi}{30}\sin\frac{25\pi}{30}$

Exercice 9.

Exponentielle complexe :

Définition 0.1 *Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.
On appelle exponentielle de z et on note e^z le nombre complexe $e^x(\cos y + i\sin y)$*

1. Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,
   $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et que $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e^z)^n = e^{nz}$
4. Montrer que l'application $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $h(z) = e^z$ est surjective.
5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $e^z \in \mathbb{U}$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}\, z = 0$.
6. Résoudre l'équation $e^z = 1 + i$.

Exercice 10.

Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ des nombres complexes de module 1 et ε un réel strictement positif. On suppose que $|u_1 + u_2 + \dots + u_n| \geq n - \varepsilon$

1. Montrer que si $0 \leq k, j \leq n$ tel que $k \neq j$ alors $|u_k + u_j| \geq 2 - \varepsilon$ et que $|u_k - u_j| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$.
   (Question 9 concours $X - 2012$).
2. En déduire que si $z_1, \dots, z_n$ sont des nombres complexes de module 1 tels
   $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = n$ alors $z_1 = z_2 = \dots = z_n$

Exercice 11.

On pose $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués et que $\operatorname{Im} S > 0$.
2. Calculer $S + T$ et ST.
3. En déduire les valeurs de S et T.

Exercice 12.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer les les sommes :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(a + kb)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(a + kb)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin(a + kb)$

Exercice 13.

Soient $n \geq 1$ et $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ calculer :

1. $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\zeta^k$
   Ind : On pourra calculer $(1-\zeta)S$.
2. $T = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \zeta^{pk}$, $(p \in \mathbb{Z})$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{l=k}^{n-1} C_l^k \zeta^k$.

Exercice 14.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$.
2. $z^n = \overline{z} \quad (n \geq 2)$.
3. $1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{n-1} + z^n = 0$
4. $|z-1| = |z+1|$

Exercice 15.

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant : $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1$

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$$

Exercice 17.

Soit ω un nombre complexe.

1. déterminer les complexes z tels que

$$z^2 + (2+i\omega)z + (i\omega + 2 - \omega) = 0$$

On notera z_1 et z_2 les deux solutions.

2. Déterminer le lie géométrique des complexes ω tels que les points d'affixes ω , z_1, z_2 soient alignés.

Exercice 18.

Linéariser :
$\sin x \cos^2 2x$, $\cos^3 x \sin^4 x$, $\sin^3 2x \cos^2 3x$

Exercice 19.

Développer :
$\cos 5x \sin 2x$, $\sin^3 4x \sin 2x$

Exercice 20.

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|\sin \frac{k\pi}{n}| = \frac{1}{2}|1 - e^{2i\frac{k\pi}{n}}|$$

2. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} |\sin \frac{k\pi}{n}|$

Exercice 21.

Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. j ou j^2 est solution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.
4. $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

Exercice 22.

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 Montrer que $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

Exercice 23.

Soit z un nombre complexe de module 1, tel que $|1 + z + z^2 + \ldots + z^9| = 1$, montrer que $z^9 = 1$ ou $z^{11} = 1$.