Fonctions convexes

Exercice 1.

Si $a, b \in \mathbb{R}^2$, on appelle segment $[a, b]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ qui s"écrivent sous la forme $ta + (1-t)b$ où $t \in [0, 1]$ c'est-à-dire $[a, b] := \{ta + (1-t)b\ ;\ t \in [0, 1]\}$.
On dir d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est convexe si pour tout $x, y \in A$; $[x, y] \subseteq A$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ on appelle l'épigraphe de f noté Épi(f) l'ensemble Épi$(f) := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}\ ;\ f(x) \leq y\}$ c'est une partie de $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $r \geq 0$. Montrer que $B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 \leq r\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
   Montrer que f est convexe si, et seulement si, Épi(f) est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

Que dire d'une fonction convexe et concave sur un intervalle I ?

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction convexe positive. On suppose que f à deux zéros a et b avec $a < b$. Montrer que f est nulle sur le segment $[a, b]$

Exercice 4.

Montrer que $\forall x, y \in]1, +\infty[$, $\ln(\frac{x+y}{2}) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$
Ind : Utiliser la fonction $x \mapsto \ln\ln x$

Exercice 5.

Prouver la convexité de $f(x) = \ln(1 + e^x)$,.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1, ..., x_n) \in]0, +\infty[^n$

$$1 + (\prod_{k=1}^{n} x_k)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)^{\frac{1}{n}}$$

En déduire que $\forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, $\forall (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$

$$(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} + (\prod_{k=1}^{n} b_k)^{\frac{1}{n}} \leq (\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k))^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 6.

Montrer que $\forall x, y, a, b > 0$, on a :
$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers $+\infty$
Ind : On pourra utiliser la croissance des cordes.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to R$ positive , bornée de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f \leq f''$

1. Montrer que f est convexe et décroissante.
2. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$
3. Soient g et h définies par $g(x) = f(x)e^x$ et $h(x) = (f(x) + f'(x))e^{-x}$ pour $x \geq 0$.
   Étudier les variations de f et de h , ainsi que le signe de h.
4. En déduire que pour $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x}$

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe strictement croissante.
Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe bornée.
Montrer que f est constante.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Montrer que f est continue.

Exercice 12.

Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$

Exercice 13.

Montrer que $\forall x_1, ..., x_n > 0$,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$