Dénombrement

Exercice 1 ($\mathbb{N}^2$ dénombrable)**.**

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie par $f(m,n) = 2^n(2m+1)$ est bijective.
2. En déduire que $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$

Exercice 2.

Soient E un ensemble non vide et X, Y une partition de E .

1. Montrer que l'application suivante est une bijection : $\mathscr{P}(E) \to (P)(X) \times \mathscr{P}(Y)$; $A \mapsto (A \cap X, A \cap Y)$
2. Montrer que pour $p, q, r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leq p+q$ on a $\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r$
3. En déduire que $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$

Exercice 3.

Soit E un ensemble non vide . $a \in E$ et $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ telle que $f(X) = X \cup \{a\}\ si\ a \in X$ et $f(X) = X \setminus \{a\}\ si\ a \in X$

1. Montrer que f est une bijection.
2. On suppose désormais que E est fini et $Card(E) = n$.On pose $\mathscr{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathscr{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair.Montrer que $Card(\mathscr{P}_0(E)) = Card(\mathscr{P}_1(E))$
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$.

Exercice 4.

Principe des tiroirs.
Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ p éléments distincts d'un ensemble E ,repartie entre une famille de n sous ensembles de E . si $n < p$ montrer qu'il existe au moins un ensemble de la famille contenant au moins deux éléments parmi les α_i.(On pourra raisonner par l'absurde)

Exercice 5.

Soient E un ensemble non vide , $f : E \to E$ une application involutive.
On pose $A = \{x \in E, f(x) \neq x\}$ et on suppose que la partie A est finie. Montrer que $Card(A)$ est pair.

Exercice 6.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ par : $f(x,y)=0\,;si\ (x,y)=(0,0)\ f(x,y)=f(y-1,0)\ si\ x=0\ et\ y\geq 1$ et $f(x,y)=f(x-1,y-1)+1\ si\ x\geq 1$

1. Montrer que pour tout n ; $f(n,0)=\frac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire que $\forall (x,y)\in\mathbb{N}^2\ \ f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x$
3. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $A_k=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2/x+y=k\}$
   - 3.1 Vérifier que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^2$
   - 3.2 Calculer $Card(A_k)$.
   - 3.3 Montrer que $\forall (x,y)\in A_k\ \frac{k(k+1)}{2}\leq f(x,y)<\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
4. Montrer que f est injective.
5. Montrer que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Exercice 7.

Soit E un ensemble fini , $CardE=n\geq 1$

1. Dénombrer le nombre de partitions $P=\{A,B\}$ de E.
2. Dénombrer le nombre de partitions $P=\{A,B,C\}$ de E.

Exercice 8.

Soit E un ensemble fini, $CardE=n\geq 1$
Calculer $\sum_{A\subset E}CardA\,;\sum_{A,B\subset E}Card(A\cap B)$ (remarquer que $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$) ; $\sum_{A,B\in E}Card(A\cup B)$

Exercice 9.

Soit n,p dans $\mathbb{N}$ tels que : $n\leq p$

1.
   - 1.1 Montrer que : $\sum_{k=n}^{p}C_k^n=C_{p+1}n+1$
   - 1.2 En déduire : $\sum_{k=1}^{n}k\,;\sum_{k=1}^{n}k^2\,;\sum_{k=1}^{n}k^3$
2. Application : On suppose $p\geq 1$.On pose : $E=\{f:[|1,p|]\to\mathbb{N}/\sum_{k=1}^{p}f(k)=n\}$ et $F=\{(x_1,x_2,...,x_p)\in\mathbb{N}^p/\sum_{k=1}^{p}x_k=n\}$
   - 2.1 Montrer que E et F sont équipotents.
   - 2.2 Montrer que $CardE=C_{n+p-1}^{p-1}$
   - 2.3 En déduire le nombre des application $f:[|1,p|]\to\mathbb{N}$ tels que $\sum_{k=1}^{p}f(k)\leq n$