Dérivabilité

Exercice 1.

Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonction suivantes sont-elles dérivables ?

1. $x \to \sqrt{x^2 - x^3}$.
2. $x \to \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$
3. $x \to \frac{x}{|x|+1}$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + \frac{n\pi}{6})$

Exercice 3.

Soient n un entier strictement positif, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^n \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 4.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ telle que $f'(0) = f(1)$ et $f(0) = 0$, on définit une fonction g sur $[0,1]$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f(1)$.

1. Montrer que g est continue sue $[0,1]$.
2. Montrer que g est dérivable sur $]0,1[$.
3. En déduire, qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) = e^{ix}$.

1. Vérifier que $f(0) = f(2\pi)$.
2. Montrer que, l'on ne peut pas appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f.

Exercice 6.

Calculer les dérivées $n^{\text{ième}}$ des fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
2. $f(x) = x^2 \ln(x+1)$.
3. $f(x) = x^p e^x$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ tel qu'il existe $\alpha > 1$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha$$

Montrer que f est constante.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et il existe $k \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; $|f'(x)| \leq k|f(x)|$.
Montrer que $f = 0$.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$.
2. En déduire les dérivées $n^{\text{ième}}$ de f.

Exercice 10.

1. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
2. En déduire toutes les primitives de la fonction $x \mapsto |x|$.

Exercice 11.

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors elle est lipschitzienne.
2. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, telle que f' admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$, alors elle est lipschitzienne.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de x_0, tel que $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$ $f(x) \neq f(x_0)$.
2. Si de plus f' est continue en x_0, montrer qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f_{/V}$ soit injective.

Exercice 13.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 14.

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
On suppose que $\forall x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice 15.

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et h un réel strictement positif.
Montrer qu'il existe $c \in]a, a+2h[$ tel que $f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$
(Ind : considérer $g(x) = f(x+h) - f(x)$)

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$ il existe $c \in [0, x]$ tel que $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(c)$.
   (Ind : considérer la fonction $g : t \mapsto f(t) - f(0) - t f'(0) - A\frac{1}{2} t^2$, où A est choisi de sorte que $g(0) = g(x)$)
2. On suppose que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}_+$; $f(x) = g(x^2)$.

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 18.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(a < b)$ une fonction n-fois dérivable.
Montrer que si $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$, alors la fonction $f^{(n)}$ s'annule.

Exercice 19.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ s'annulant $(n+1)$-fois dans I.

1. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
2. Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)^{ième}$ de $f' + \alpha f$ s'annule au moins 1-fois.
   (Ind : considérer la fonction $x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$).

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$.
On pose $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$

1. Justifier l'existence de M_0 et M_2.
2. Montrer que pour tous $x, h \in \mathbb{R}$;
$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$
$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$
   (Ind : on pourra utiliser la première question de l'exercice 16)
3. En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$;
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2$$
4. Montrer alors que f' est bornée. On pose $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$
5. Montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.
   (Ind : on pourra étudier les variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par $h \mapsto \frac{1}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2$)

Exercice 21.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive, dérivable sur $]a, b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Exercice 22.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x)f'(x) \geq 0$.
Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Ind : considérer la fonction $g : x \mapsto f^2(x)$.

Exercice 23.

Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 24.

Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Ind : considérer la fonction $x \mapsto f(x)e^x$.

Exercice 25.

Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(x) + x$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est continue sur J.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0.
4. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J.

Exercice 26.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \tan(x)$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $(n+1)a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

   (Ind : utiliser la formule de Leibniz)

Exercice 27.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $[a, b]$.

1. Dans cette question on suppose que $f'(a)f'(b) < 0$.
   1.1 Monter que f n'est pas strictement monotone.
   1.2 En déduire que f n'est pas injective.
   1.3 Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que si y est un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = y$.