Déterminants

Exercice 1.

Soit
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 8 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$

1. Décomposer σ en un produit de transpositions
2. Calculer la signature de σ
3. Calculer σ^2 et σ^{-1}.Quelles sont leurs signatures ?

Exercice 2.

Pour $\sigma \in S_n$, on pose $\pi(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

1. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $\pi(\sigma) = \pm 1$.
2. Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$, montrer que $\pi(\sigma\sigma') = \pi(\sigma)\pi(\sigma')$.
3. Montrer que si $\tau \in S_n$ est une transposition alors $\pi(\tau) = -1$.
4. En déduire que l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ coïncide avec la signature.

Exercice 3.

Calculer et factoriser les déterminants suivants :
$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 4.

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \ddots & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5 (Déterminant circulant).

Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ et $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1\end{pmatrix}$$

$$\Omega=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix}$$

1. Calculer $A\Omega$ en fonction de ω et $P=\sum_{k=1}^{n}a_kX^{k-1}$.
2. En déduire que $\det A=\prod_{k=0}^{n-1}P(\omega^k)$
3. Pour $\alpha\in\mathbb{C}$, on pose

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1}\\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2}\\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \dots & \alpha^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} & 1\end{pmatrix}$$

   Montrer que $\det B=(1-\alpha^n)^{n-1}$.

Exercice 6.

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ antisymétrique.Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible

Exercice 7.

1. Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie.On suppose qu'il existe $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2+id_E=0$.Démontrer que $\dim E$ est paire
2. Donner un exemple de $\mathbb{C}$ ev vectoriel de dimension finie impaire , qui possède un endomorphisme f tel que $f^2+id_E=0$

Exercice 8.

1. Pour $n \geq 1$, on pose

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.1 Calculer Δ_1 et Δ_2

1.2 Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\Delta_{n+2} = \Delta_n$$

1.3 En déduire une expression de Δ_n en fonction de n.

2. Pour $n \geq 1$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2.1 Calculer D_1 et D_2.

2.2 Montrer que , pour tout $n \geq 1$, $D_{n+2} = -2D_{n+1} - D_n$

2.3 En déduire une expression de D_n en fonction de n.

Exercice 9.

Déterminant de **Vandermonde** :

Définition 0.1 *Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on appelle déterminant de **Vandermonde** , et on note $V(x_1, ..., x_n)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :*

$$V(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer que $V(x_1, ..., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

Exercice 10.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$, montrer que $\det A \in \mathbb{R}$

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E.
Soient $\sigma \in S_n$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \ , \ f(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$
2. Calculer $\det A$

Exercice 12.

1. Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie. s une symétrie de E
   Montrer que $\det s = (-1)^{\dim(\ker(s+id_E))}$ et que
   $\operatorname{tr} s = \dim(\ker(s-id_E)) - \dim(\ker(s+id_E))$
2. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$, calculer $\det\phi$

Exercice 13.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tells que $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$
Indication : remarquer que dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$

Exercice 14.

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension n , $v_1, ..., v_n \in E$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. démontrer que
$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(v_1, ..., f(v_j), ..., v_n) = \operatorname{tr} f \det_{\mathscr{B}}(v_1, ..., v_n)$

Exercice 15.

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A + M) = \det A + \det M$, montrer que $A = 0$

Exercice 16.

D'après CCP
Soient $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ des complexes.
Déterminer la valeur du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

Exercice 17.

$\boxed{1.}$ Soient $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que
$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$

$\boxed{2.}$ Calculer le déterminant des deux matrices $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ en fonction des déterminants des matrices A et D.

$\boxed{3.}$ Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$

Indication : on pourra calculer le produit $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$

$\boxed{4.}$ Supposons de plus A inversible et $AC = CA$, et posons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$\boxed{4.1}$ Calculer le produit

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A^{-1}C & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D-A^{-1}CB \end{pmatrix}$$

$\boxed{4.2}$ En déduire que

$$\det M = \det(AD - CB)$$

Exercice 18.

Densité de $GL_n(\mathbb{C})$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $0 < |x| < \varepsilon$, $A + xI_n \in GL_n(\mathbb{C})$

Exercice 19.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\det(\operatorname{com} A) = (\det A)^{n-1}$.
2. Montrer que si $\operatorname{rg} A = n$, alors $\operatorname{rg}(\operatorname{com} A) = n$.
3. Montrer que si $\operatorname{rg} A \leq n-2$, alors $\operatorname{com} A = 0$.
4. Montrer que si $\operatorname{rg} A = n-1$, alors $\operatorname{rg}(\operatorname{com} A) = 1$.

Exercice 20.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note par $\chi_A(\lambda)$ le déterminant $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

1. Justifier que χ_A est une fonction polynomial de degré n.
   χ_A est appelé le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que si, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables ; alors $\chi_A = \chi_B$.
3. On pose $\chi_A = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$.
   - 3.1 Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
     Montrer que $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A) X + \det A$.
   - 3.2 Montrer que $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)$ et $a_0 = \det A$.
4. Cas d'une matrice nilpotente : Calculer χ_A dans le cas où la matrice A est nilpotente.

Exercice 21.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et Q un élément de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = QBQ^{-1}$.

1. Montrer qu'ils existent deux matrices $R, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $Q = R + iS$, et que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $A(R + zS) = (R + zS)B$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $p(z) = \det(Q + zR)$.
   Montrer que p est un polynôme en z non nul.
3. En déduire qu'il existe un réel α, tel que $p(\alpha) \neq 0$.
4. Montrer que les deux matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.