Calculs Asymptotiques

Exercice 1.

Déterminer un équivalence simple et la limite de la suite de terme général : $u_n = n\ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$

Exercice 2.

Trouve un équivalent simple de la suite de terme général $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$.

Exercice 3.

Trouver un équivalent au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $x \longmapsto \sin(x) + \cos(2x)$

Exercice 4.

Trouver un équivalent simple au voisinage de π^+ de la fonction définie par $f(x) = (1+\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

Exercice 5.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$;
$e^{-x} =_{+\infty} o(\frac{1}{x^n})$

Exercice 6.

Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0 :

1. $\tan x$ à l'ordre 4
2. $\sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3
3. $\ln(1+\operatorname{sh} x)$ à l'ordre 3
4. $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ à l'ordre 3
5. $\ln(\cos x + \mathrm{e}^x)$ à l'ordre 3
6. $\ln(x^5 \sin(x) + 1)$ à l'ordre 4

Exercice 7.

Calculer les développements limités suivants au voisinage de $+\infty$

1. $\dfrac{x}{1+x}$ à l'ordre n
2. $\arctan x$ à l'ordre 3
3. $x \sin \dfrac{1}{x}$ à l'ordre 4

Exercice 8.

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(\cos^2 \pi x)}{\tan(x-1)}$

Exercice 9.

Calculer le développement limité à l'ordre 3 de

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\sinh(x)}$$

Exercice 10.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} C_{2k}^k x^k + o(x^n)$ au voisinage de 0
2. En déduire un développement limité de la fonction arcsin à tout ordre au voisinage de 0

Exercice 11.

1. Montrer que l'équation $x \sin x = 1$ d'inconnue $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ possède une unique solution α.
2. On note f la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\sin x}{1 - x\sin x}$ définie sur $]-\alpha, \alpha[$. Montrer que f est bijective de $]-\alpha, \alpha[$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer

Exercice 12.

On note f la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1-\cos x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$

1. Montrer que f est prolongeable en 0
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la position relative du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0

Exercice 13.

Calculer le développement limité à l'ordre 10 de $x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(0) = 0$
C'est un exemple de fonction non nulle dont tous les DL_n en 0 sont nuls.

Exercice 15.

Soit $f :\mapsto (1+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

1. Donner le développement limité de $x :\mapsto f(x) - x$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$
2. En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f
3. Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote au voisinage de $+\infty$

Exercice 16.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1-x^2}$

1. Montrer que f admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. En déduire $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 17.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(2+\sin(x))\,y''+e^x y=y'$$

$$y(0)=y'(0)=1$$

`N.B:On ne demande pas de résoudre cette eq. diff. Il s'agit de calculer le` $DL_5(0)$ `d'une solution.`

Notons f une solution de cette eq. diff.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$
2. Justifier que f'' admet un $DL_3(0)$.
3. On pose $f''(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+o(x^3)$
   - 3.1 Donner l 'expression du $DL_4(0)$ de f'
   - 3.2 En calculant les parties régulières de $(2+\sin(x))f''+e^x f$ et f' trouver des relation entre les c_i
   - 3.3 En déduire le $DL_5(0)$ de f.

Exercice 18.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction définie par

$$f(x)=\frac{\cosh(x)-1}{\ln(1+x)\sin(x)}$$

Exercice 19.

On considère un réel $a>0$ et la suite définie par récurrence par $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N} u_{n+1}=u_n^2=u_n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers ∞.
2. On considère la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n=\dfrac{\ln u_n}{2^n}$.
   Montrer que $(v_n)_n$ est une suite croissante.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n\leq\dfrac{\ln(1+\frac{1}{a})}{2^{n+1}}$, et en déduire que $(v_n)_n$ est convergente. On note ℓ sa limite.
4. Montrer que pour tous $n,p\in\mathbb{N}$ on a $v_{n+p+1}-v_n\leq\dfrac{1}{2^n}\ln(1+\frac{1}{u_n})$.
5. En déduire que $u_n\sim e^{2^n\ell}$.

Exercice 20 (Prolongement)**.**

Soit f une application de calasse $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ (1-e^{-x})y'(x)+y(x)=f(x)$$

On note G et F les applications définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$G(x)=\int_0^x e^t f(t)dt \quad F(x)=\frac{1}{e^x-1}G(x)$$

1. Montrer que G et F sont des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Déterminer le $DL_2(0)$ de G
3. En déduire le $DL_1(0)$ de F
4. En déduire de F est prolongeable de 0, on notera encore F la fonction prolongée, montrer que F est dérivable en 0
5. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E_0)
6. Montrer que F vérifie E sur $\mathbb{R}_+^*$
7. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$
8. Vérifier que F est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie en 0
9. La fonction F est-elle une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$?