

Équations différentielles

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1 + t^2)y' + ty = 1$

2. $y' + y = e^t$

3. $y' + e^{it}y = 0$

4. $(2 + \cos(t))y' - \sin(t)y = \cos(t)$

5. $y' + |t|y = 0$

6. $(t^2 - 1)y' + y = 0$ sur $]1, +\infty[$

7. $y' + \tan(t)y = \sin(2t)$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

8. $y' - y = \cos(t)$

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

A) Dans cette partie donner les solutions à valeurs complexes :

1. $y'' - 2y' + 5y = t^4 e^t$

2. $y'' + 4y' - 5y = (t^2 + 1)e^t$

3. $y'' + y' + y = t^2 e^t \cos(2t)$

4. $y'' + iy = \sin(t)$

5. $y'' - 2y' + y = t^2 e^t$

B) Dans cette parties donner les solutions à valeurs réelles :

1. $y'' + y' + y = t^2 e^{2t}$

2. $y'' + 4y' - 5y = (t^2 + 1)e^t$

3. $y'' - 2y' + y = t^3 e^t$

4. $y'' + 2y' + y = t \sin(t)$

Quelques exemples d'équations différentielles :

1. On considère l'équation différentielle : $(E) (1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$

1.1 On pose $y(x) = z(\arctan(x))$. Transformer (E) en une équation différentielle à coefficients constants

1.2 Résoudre (E)

2. On considère l'équation différentielle suivante : $(E) (1 - t^2)y'' - ty' - y = 0$

2.1 Vérifier que $z(t) = e^{\arcsin(t)}$ définit une solution de (E) sur $] -1, 1[$

2.2 On pose $y(t) = x(t)z(t)$ sur $] -1, 1[$, trouver l'équation différentielle que doit vérifier x sur $] -1, 1[$ pour que y soit solution de (E) sur $] -1, 1[$

2.3 Résoudre (E) sur $] -1, 1[$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + y(-t) = \operatorname{ch}(t) + \sin(t)$$

Ind : écrire y comme somme d'une fonction paire et une fonction impaire

Problème des raccords :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $t^2 y' + y = 1$
2. $t y' + 2y = \frac{t}{1+t^2}$
3. $(t^2 - 1)y' - 4ty = 1$
4. $|t|y' + (t - 1)y = t^2$

Équation à variables séparables :

C'est le cas d'une équation pouvant s'écrire sous la forme : $y' b(y) = a(t)$

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = e^t y^2 + e^t$
2. $y y' = \frac{1+y^2}{2+2t^2}$

Équations différentielles non linéaires :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 1 + y^2$
2. $y' = e^{x-y}$.
3. $y' = \text{ch}(y)$
4. $y - x y' = \sqrt{x^2 + y^2}$
5. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3t}}{\sqrt{t^2+1}}$

Méthode de variation des constantes de Lagrange :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = c$ et (E₀) l'équation différentielle homogène associée, où $a, b \in \mathbb{K}$ et $c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

La méthode :

Connaissant la solution générale $y = \lambda y_1 + \beta y_2$ de (E₀), on peut trouver une solution particulière de (E) sous la forme

$t \mapsto \lambda(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$ où $\lambda, \beta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ déterminées par le système
$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \beta' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \beta' y_2' = c \end{cases}$$

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$.
2. $y'' + y = \tan t$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. $y'' + y = f$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. (on exprimera la solution à l'aide d'une intégrale.)