Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1.

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts ($n \geq 1$). Notons $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ ($e_0 = (1, 0, \dots, 0), e_1 = (0, 1, \dots, 0), \dots$).
On considère l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$.

1. Justifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker\varphi$, en déduire que φ est un isomorphisme.
3. Montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\varphi(L_i) = e_i$. On déterminera une expression de L_i.
   Les L_i s'appellent les polynôme de Lagrange.
4. Justifier que $L := (L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
5. Calculer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base L.

Exercice 2.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, pour $1 \leq i \leq n$, on note v_i le vecteur $v_i = (\lambda_1^{i-1}, \dots, \lambda_n^{i-1})$ élément de $\mathbb{K}^n$.
Montrer de deux façons, que la famille $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
Ind : polynôme , interpolation...

Exercice 3.

Soit E un ev de dimension n. F et G deux sev de E.
Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G \neq \{0\}$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, z - y, x - y)$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$
2. Déterminer une base du $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Vérifier que $\ker f$ et Imf ne forme pas une somme directe.

Exercice 5.

Soit E un $\mathbb{K}$ ev , $E_1, \dots, E_r$ des sous espaces vectoriels de dimension finie de E.
Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{r} E_i$ est directe si, et seulement si, $\dim(\sum_{i=1}^{r} E_i) = \sum_{i=1}^{r} \dim E_i$.

Exercice 6.

Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $((X-a)^i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Donner les composantes de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 7.

Soit E un ev de dimension n , f un endomorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} f^n = \operatorname{rg} f^{n+1}$.

Exercice 8.

Soit E en ev de dimension finie, f et g deux endomorphisme de E tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g$.
Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 9.

Soit E un ev de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :
$K_n = \ker f^n$ et $I_n = \operatorname{Im} f^n$

1. Montrer que la suite $(K_n)_n$ est croissante et que $(I_n)_n$ est décroissante au sens de l'inclusion.
2. Montrer que ces deux suites sont stationnaires et que si $p = \min\{i /\ K_i = K_{i+1}\}$ alors $p = \min\{i /\ I_i = I_{i+1}\}$
3. Montrer que $E = K_p \oplus I_p$
4. Montrer que $f(I_p) \subset I_p$, et que l'endomorphisme induit par f sur I_p est un automorphisme.

Exercice 10.

Soient a et b deux nombres complexes.On considère l'espace vectoriel E des suites complexes vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$$

Déterminer $\dim E$
Considérer l'application $f : E \to \mathbb{C}^2$ définie par $f((u_n)_n) = (u_0, u_1)$

Exercice 11.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que
$f^3 = -f$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus Im f$

Exercice 12.

Soit E un ev de dimension n. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f+g$ est injectif et $Img \subset \ker f$

1. Montrer que $rg(f)+rg(g)=n$
2. En déduire que $\ker f = Img$

Exercice 13.

Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension n. Montrer que E est de dimension $2n$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Exercice 14.

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x)=0$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $f^n = 0$

Exercice 15.

Soit E un ev de dimension finie.
Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker f = Imf$ si, et seulement si, E est de dimension paire.

Exercice 16.

Soit E un ev de dimension finie n. et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ Montrer que
$|rg(f)-rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f)+rg(g)$

Exercice 17.

Soit E un ev de dimension finie n. et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ Montrer que
$rg(f)+rg(g)=rg(f+g)$ si, et seulement si, $Imf \cap Img = \{0\}$ et $\ker f + \ker g = E$

Exercice 18.

Soit E un ev de dimension n ,et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E
2. On pose $H = \{g \in \mathscr{L}(E)\ ,\ \ gf = fg\}$
   - 2.1 Montrer que H est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$
   - 2.2 Montrer que $\dim H = n$.
     Ind : Montrer que $(\mathrm{Id}, f, ..., f^{n-1})$ est une base de H

Exercice 19.

Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Montrer qu'ils existent $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que pour tour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$.

Exercice 20.

Soit E un ev de dimension $n \geq 2$.Montrer que l'intersection de deux hyperplans distincts de E est un sev de dimension $n-2$

Exercice 21.

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.
Montrer qu'ils existent $g \in E^*$ et $a \in E$ tel que $\forall x \in E\ f(x) = g(x)a$
En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$

Exercice 22.

Soient E un ev de dimension finie, f et g deux formes linéaires non nulles sur E.
Montrer que $\ker f = \ker g$ si, et seulement si, la famille (f, g) est liée.

Exercice 23.

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \geq 1$ et F un sev de E distinct de E de dimension d.
Montrer que F est l'intersection de $n-d$ hyperplans de E

Exercice 24.

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ Montrer que :

$$\ker f = Imf \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } \dim E = 2rg(f)$$

Exercice 25.

Soient E un $\mathbb{K}$ ev , F un sev de E et $f \in \mathscr{L}(E)$

1. Montrer que si $F \subset f(F)$ et F de dimension finie alors $f(F) = F$
2. Le résultat reste t-il vrai si F n'est pas de dimension finie ?

Exercice 26 (Théorème de Maschke)**.**

Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie.

1. Soit u un endomorphisme de E et p un projecteur de E.
   Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si, et seulement si, $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stable par u.
2. Soit G un sous groupe fini de $GL(E)$, F un sev de E stable par tous les éléments de G et p un projecteur de E d'image F. On pose $q = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1}$.
   - 2.1 Montrer que que pour tout $g \in G$; $g \circ q = q \circ g$.
   - 2.2 Montrer que q est un projecteur d'image F.
3. Conclure que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.