Espaces vectoriels, généralités

Exercice 1.

Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\oplus$ définie par $a \oplus b = ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe définie par $\lambda \otimes a = a^\lambda$, $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Exercice 2.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel non nul et F_1,...,F_n des sous espace **stricts** de E. On veut montrer que $E \neq F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$.($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1. Traiter le cas $n = 2$
2. On suppose que $F_n \nsubseteq F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$ et on choisit $x \in F_n \setminus F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$ et $y \notin F_n$
   - 2.1 Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \notin F_n$
   - 2.2 Montrer que $\forall i \leq n-1$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$
   - 2.3 Conclure

Exercice 3.

Montrer que la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre dans $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$ espace vectoriel.

Exercice 4.

Soient E un espace vectoriel, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous espaces vectoriels de E tels, pour tous $i, j \in I$ il existe $k \in I$ tels que $E_i \cup E_j \subset E_k$; montrer que $\cup_{i \in I} E_i$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$.
Montrer que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels deux à deux distincts alors la famille $(g_{\alpha_i})_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

Exercice 6.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note f_α la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$.
Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 7.

Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on pose
$F = \text{Vect}(x \mapsto \cos kx)_{0\leq k\leq n}$ et $G = \text{Vect}(x \mapsto \cos^k x)_{0\leq k\leq n}$.
Montrer que $F = G$

Exercice 8.

Soit $E = \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$F = \{f \in E,\ f(0) = f'(0) = 0\}$
Montrer que F est un sev de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 9.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et F et G deux sev de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ Montrer que $f(F) \subset f(G) \Leftrightarrow F + \ker f \subset G + \ker f$

Exercice 10.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $\ker(g\circ f) = f^{-1}(Imf \cap \ker g)$

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\ker f = \ker f^2 \quad \Leftrightarrow \quad Imf \cap \ker f = \{0\}$$

$$Imf = Imf^2 \quad \Leftrightarrow \quad Imf + \ker f = E$$

Exercice 12.

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tel que $a \neq b$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - (a+b)f + ab\text{Id}_E = 0$ Montrer que :
$E = \ker(f - a\text{Id}_E) \oplus \ker(f - b\text{Id}_E)$

Exercice 13.

Soient p nq deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$
Montrer que dans ce cas :
$\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$ et $Im(p+q) = Imp \oplus Imq$

Exercice 14.

Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u : E \to E$ définie par :
$\forall f \in E \; u(f)(x) = \int_x^{x+\pi} f(t)dt.$
Montrer que $u \in \mathscr{C}(E)$ et Déterminer $\ker u$

Exercice 15.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est libre
2. Montrer que $(\mathrm{Id}, f, ..., f^{n-1})$ est libre

Exercice 16.

Soients X un ensemble non vide et $E = \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications de X à valeurs dans K. Pour $f \in E$, on appelle support de f et on note supp$f$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$.
On note c_0 l'ensemble des élément $f \in E$ tel que le support de f est **fini**.

1. Montrer que c_0 est un sev de E.
2. Pour $a \in X$, on note f_a l'élément de E définie par $f_a(a) = 1$ et $f_a(x) = 0$ si $x \neq a$. Justifier que $f_a \in c_0$.
3. Montrer que $(f_x)_{x \in X}$ est une base de c_0.