Fonctions usuelles

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes :

1. $2^x = 3^x$
2. $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$
3. $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

Exercice 2.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   $\arg\mathrm{sh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
2. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$;
   $\arg\mathrm{ch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$;
   $\arg\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1+\tanh^2(\frac{x}{2})}{1-\tanh^2(\frac{x}{2})}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{2\tanh(\frac{x}{2})}{1-\tanh^2(\frac{x}{2})}$.

Exercice 4.

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$

Exercice 5.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ .Simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx)$

Exercice 6.

Montrer que $\forall x \in]-1,1[;\quad \arctan(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) = \frac{1}{2}\arccos(x)$

Exercice 7.

Montrer que
$\arctan(x) = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

Exercice 8.

On pose
$\theta = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$

1. Montrer que $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
2. Montrer que $\tan(\theta) = 1$
3. En déduire la valeur de
   $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$

Exercice 9.

Soit $p \in \mathbb{N}$.Calculer $\arctan(p+1) - \arctan(p)$.
En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{p=1}^{n} \arctan\frac{1}{p^2+p+1}$

Exercice 10.

Donner une expression plus simple de :

1. $f(x) = \operatorname{argcosh}\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}\right)$
2. $g(x) = \operatorname{argsinh}(2x\sqrt{1+x^2})$
3. $h(x) = \operatorname{argtanh}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Exercice 11.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\operatorname{sh} x \geq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

Exercice 12.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\arctan(\operatorname{sh} x)| = \arccos(\frac{1}{\operatorname{ch} x})$

Exercice 13.

Soient a et b deux réels positifs.Montrer que :
$a^2 - b^2 = 1$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a = \operatorname{ch} \alpha$ et $b = \operatorname{sh} \alpha$

Exercice 14.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, résoudre le système suivante : $\begin{cases} \cosh x + \cosh y & = a \\ \sinh x + \sinh y & = b \end{cases}$

Exercice 15.

Résoudre l'équation :
$\operatorname{arg sh} x + \operatorname{arg ch} x = 1$

Exercice 16.

Tracer la courbe de la fonction $f(x) = \arcsin \sin x$