Structures algébriques

Exercice 1.

Soit G un groupe. On pose $Z(G) = \{x \in G\ ,\ \ \forall y \in G\ \ xy = yx\}$.
Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe de G (appelé le centre de G)

Exercice 2.

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et la loi $*$ définie sur G par $(x, y) * (x', y') = (xx', x'y + \frac{y'}{x})$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe
2. Quel est le centre de G ?
3. Montrer que $\mathbb{R}^* \times \{0\}$, $\{1\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ sont des sous groupes de G

Exercice 3.

Soit G un groupe et H un sous groupe de G. Soit $x \in G$ on pose $xHx^{-1} = \{xhx^{-1}\ ,\ \ h \in H\}$.Montrer que xHx^{-1} est un sous groupe de G.

Exercice 4.

Montrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 5.

Soit G un groupe pour $g \in G$ on note $t_g : G \to G$ l'application définie par $t_g(x) = gx$.

1. Montrer que t_g est bijective.
2. Quelle est la bijection réciproque de t_g ?

Exercice 6.

Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$ on note $i_g : G \to G$ l'application définie par $i_g(x) = g^{-1}xg$

1. Montrer que pour tout $g \in G$, i_g est automorphisme de G
   On pose $Fix(i_g) = \{x \in G\ ,\ i_g(x) = x\}$
2. Montrer que $Fix(i_g)$ est un sous groupe de G
3. Démontrer que $\bigcap\limits_{g \in G} Fix(i_g) = Z(G)$

Exercice 7.

Soit G un groupe de neutre e tel que $\forall x \in G$, $x^2 = e$.
Montrer que G est un groupe abélien.

Exercice 8.

Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{U}, \times)$ l'application définie par $f(\theta) = e^{i\theta}$.
Montrer que f est un morphisme de groupes, et déterminer son noyau.

Exercice 9.

Soit G un groupe.

1. Montrer que si $x \mapsto x^2$ est un morphisme de groupes alors G est commutatif.
2. Montrer que si $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme de groupes alors G est commutatif.
3. Montrer que si $x \mapsto x^3$ est un morphisme de groupes surjectif alors G est commutatif.

Exercice 10.

Soit G un groupe commutatif fini d'ordre impair. Montrer que $x \mapsto x^2$ est surjectif.

Exercice 11.

Soit G un groupe de neutre e et $x \in G$ Montrer qu'il y a équivalence entre

1. $< x >$ est un sous groupe fini.
2. La suite $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodique.
3. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{n_0} = e$

Exercice 12.

Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément $x \in G$ tel que $x \neq e$ et $x^2 = e$

Exercice 13.

Théorème de Lagrange
Soit G un groupe , et H un sous groupe de G.
On définit sur G une relation binaire $\mathscr{R}$ par : $\forall (x,y)\in G^2$, $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow xy^{-1}\in H$

1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur G
2. Déterminer la classe d'équivalence de l'élément neutre e.
3. On suppose que G est fini.
   - 3.1 Démontrer que les classes d'équivalence suivant $\mathscr{R}$ ont toutes le même cardinal.
   - 3.2 En déduire que $|H|$ divise $|G|$

Exercice 14.

Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$.On suppose que $G\neq\{0\}$

1. Montrer que $G\cap\mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure a.
2. Montrer que $a\in G$.
3. On suppose que $a>0$. Montrer que $G=a\mathbb{Z}$
4. On suppose que $a=0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$
5. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodique non constante continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet une plus petite période. c-a-d : $\{T\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x+T)=f(x)\}$ à un plus petit élément.
6. Soi $H=\{n+p\sqrt{2},\ \ n,p\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$. De quel type est-il ?
7. Montrer que $\{\cos n\ \ /\ \ n\in\mathbb{N}\}$ est une partie dense dans $[-1,1]$.

Exercice 15.

Démontrer que tout anneau intègre fini est un corps

Exercice 16.

Soit A un sous anneau de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Z}\subset A$

Exercice 17.

On pose $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\ \ ,\ \ a,b\in\mathbb{Z}\}$ (ensemble des entiers de Gauss)

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$
2. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ est $\{1,1,-i,i\}$

Exercice 18.

Soit A un anneau . On dit qu'un élément $x \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$

1. Montrer que si A intègre ,alors 0 est le seul élément nilpotent.
2. Montrer que si $x, y \in A$ sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
3. Montrer que si $x, y \in A$ tels que xy est nilpotent,alors yx est nilpotent.
4. Montrer que si $x \in A$ est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.

Exercice 19.

Soit G un groupe de neutre e et H une partie de G contenant e. Pour $g \in G$ on définit $gH := \{gh \,/\, h \in H\}$.

1. Montrer que si H est un sous groupe de G, alors la famille $(gH)_{g\in G}$ forme une partition de G.
2. Montrer que si la famille $(gH)_{g\in G}$ forme une partition de G alors H est un sous groupe de G.

Exercice 20.

Soit G un groupe . H et K deux sous groupes de G, on note $HK = \{hk \,/\, h \in H, k \in K\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. HK est un sous groupe de G
2. KH est un sous groupe de G
3. $HK \subset KH$
4. $KH \subset HK$

Exercice 21 (Anneaux booléens)**.**

Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, $2x = 0$.
2. En déduire que A est commutatif.

Exercice 22 (Dérivation dans un anneau)**.**

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $D : A \to A$ tel que pour tous $x, y \in A$; $D(x+y) = D(x)+D(y)$ et $D(xy) = D(x)y+xD(y)$.

1. Montrer que $D(0) = D(1) = 0$, et pour tout $x \in A$; $D(-x) = -D(x)$.
2. Soit $x \in A$ inversible. Montrer que $D(x^{-1}) = -x^{-1}D(x)x^{-1}$.

Exercice 23.

Soient K et L deux corps. $f : K \to L$ un morphisme de corps.Montrer que f est injectif