Intégration

I) Intégration sur un segment

Exercice 1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{p^2}{n^2} & \text{si } x \in [\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}[; 1 \le p \le n \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
Montrer que f_n est en escalier sur $[0,1]$, et calculer $\int_0^1 f_n$

2. En déduire que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

1. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux, montrer que :
$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

2. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$, continues par morceaux, montrer que :
$$\left(\left|\int_a^b \bar{f} g\right|\right)^2 \le \left(\int_a^b |f|^2\right)\left(\int_a^b |g|^2\right)$$

3. Étudier le cas d'égalité dans 1. pour les fonctions continues.

Exercice 3.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $f(a) = 0$ $(a < b)$. Montrer que
$$\int_a^b f^2 \le \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2$$

Exercice 4.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que , pour toute fonction g en escalier sur $[a,b]$, $\int_a^b fg = 0$. Montrer que $f = 0$

Exercice 5.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans $]0,1[$

Exercice 6.

Calculer les intégrales :

$$\int_0^1 \max(2, e^t)\,dt \;,\; \int_0^n e^{[t]}\,dt \;,\; n \geq 2$$

Exercice 7.

Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$
2. $x \mapsto \frac{\sin x}{1+\sin x}$
3. $x \mapsto e^{x+e^x}$
4. $x \mapsto \arctan x$

Exercice 8 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

Montrer le résultat si f est continue par morceaux sur $[a,b]$

Exercice 9 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux . Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt = 0$$

Indication : commencer par le cas où f est en escalier, puis ...

Exercice 10.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f| \Leftrightarrow f \leq 0 \text{ ou } f \geq 0$$

Exercice 11 (Intégrales de Wallis)**.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$
2. Montrer que $(I_n)_n$ est une suite décroissante, en déduire qu'elle est convergente
3. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
4. En déduire que $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$
5. En calculant le produit $I_{2p}I_{2p+1}$ déduire un équivalent simple de I_n

Exercice 12.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [a,b]$,
$f(a+b-x) = f(x)$

1. Montrer que
$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x) dx$$
2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx$

Exercice 13.

Calculer les limites des sommes suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[n]{2^k}}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{n+k}$

Exercice 14.

Calculer la limite de :

$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k^2}{n^2})}$$

II) Intégrales généralisées

Exercice 15.

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\int_0^1 \ln t dt$
2. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
3. $\int_0^{+\infty} t \sin t e^{-t} dt$
4. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt$
5. $\int_0^1 \cos^2(\frac{1}{t}) dt$
6. $\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt$
7. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$
8. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^\alpha t} dt$

Exercice 16.

Discuter, suivant la valeur des paramètres ,la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}$, $\alpha > 0$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t} dt$

Exercice 17.

Justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$, $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$

Exercice 18 (D'après CNC 2012).

Soit λ un réel vérifiant $2\lambda > -1$

1. Montrer que pour tout réel x,la fonction $\theta \to e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta$ est intégrable sur l'intervalle $]0,\pi[$, on pose $f_\lambda(x) = \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta d\theta$

2. Montrer que pour tout réel x,
$f_\lambda(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}(\theta)d\theta$

Exercice 19.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge
Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$

2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et calculer F'

3. Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

4. 4.1 Montrer qu'elle existe une constante C telle que, $\forall x \in]0,1]$

$$\left|\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt + \ln t\right| \leq C$$

4.2 En déduire que $F(x) \sim_{0^+} -\ln x$

5. 5.1 Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$ est convergente

5.2 Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \frac{1}{x}F(x)$

5.3 À l'aide d'une intégration par partie , en déduire que
$F(x) \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$

Exercice 20.

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-i)^2}dx$ est convergente et la calculer

Exercice 21.

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \sin\frac{1}{x^2}dx$ converge

Exercice 22.

1. Déterminer la nature , selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-\cos x)^\alpha} dx$
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{t^{\frac{2}{3}}} dx$ converge.

Exercice 23 (D'après CNC 2012)**.**

La fonction Γ **d'Euler** est définie , pour tout $x>0$, par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$

1. Montrer qu'elle est bien définie
   Soit p un réel strictement positif
2. Montrer que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
3. Justifier que $\Gamma(p) > 0$
4. Montrer que $\Gamma(p) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} s^{2p-1}e^{-s^2} ds$

Exercice 24.

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{\cos x}{1+x^2}$ sur $[0,+\infty[$
2. $x \mapsto \frac{1-e^{ix}}{x(1+x)}$ sur $]0,+\infty[$
3. $x \mapsto \frac{[x]}{x^2(1+x)}$ sur $[2,+\infty]$
4. $x \mapsto \frac{e^{xz}}{1-e^x}$ sur $]0,+\infty[$, $\quad z \in \mathbb{C}$

Exercice 25.

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$

Exercice 26.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = l < 0$. Montrer que f et f' sont intégrables sur $[0,+\infty[$