Limites et continuité

Exercice 1.

Étudier les limites fonctions suivantes :

1. $\frac{x\sin a - a\sin x}{x-a}$ en a , $a\in\mathbb{R}$.
2. $\frac{e^{ix}-e^{ia}}{x-a}$ en a , $a\in\mathbb{R}$.
3. $\frac{e^{ix}+[x]}{x^2}$ en $+\infty$.
4. $\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{\sin\pi x}$ en 1.

Exercice 2.

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes : $f : x\longmapsto x\sqrt{x}[\frac{1}{x}]e^{ix}$, $g : x\longmapsto x[\frac{1}{x}]$

Exercice 3.

Étudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$: $x\longmapsto x[\frac{1}{x}]$, $g : x\longmapsto \frac{1}{x^2}[x]$

Exercice 4.

Montrer que les deux fonctions sin et cos n'admettent pas de limites en $\pm\infty$.

Exercice 5.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction périodique, et admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 6.

Soient $f,g : I\to\mathbb{R}$ deux fonctions continue, montrer que $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur I.

Exercice 7.

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=0$ sinon.
Montrer que f est discontinue en tout point.

Exercice 8.

Soient $a, b \in \mathbb{R}, (a < b)$,
$f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 10.

Soit P un polynôme de degré impair.
Montrer que P admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Z}$.
Montrer que f est constante.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(2x) = f(x)$.
Montrer que f est constante.

Exercice 13.

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f possédant une limite finie en $+\infty$, g périodique et $f + g$ croissante.

1. Montrer que g possède une limite en $+\infty$
2. Montrer que g est constante.

Exercice 14.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue.

Exercice 15.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ continue et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.

Le but de cet exercice et de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $|f(x+1) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq A$,
   $|f(x+n) - f(x)| \leq n\frac{\varepsilon}{2}$.
3. On pose $M = \sup\limits_{[A,A+1]} |f|$. Justifier la définition de M.
   Montrer que $\forall x \geq A$,
   $|f(x)| \leq M + (x-A)\frac{\varepsilon}{2}$.
4. En déduire l'existence de $A' > 0$, tel que $\forall x \geq A'$, $|f(x)| \leq \varepsilon|x|$.
5. Conclure.
6. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

   Montrer que :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x f(x) = 0$

Exercice 16.

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [a, b]$, $g(x) < f(x)$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $\forall x \in [a, b]$, $\alpha + g(x) < f(x)$.
2. On suppose de plus que $\forall x \in [a, b]$, $g(x) > 0$, monter qu'il existe $k > 1$, tel que $\forall x \in [a, b]$, $kg(x) < f(x)$.

Exercice 17.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec f continue et g bornée.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 18.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue tel que les deux limites $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)|$ existent et sont finies.
Montrer que f est bornée.

Exercice 19.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Montrer que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 20.

Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $0 \leq k \leq n-1$ on pose
   $\alpha_k = f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k+1}{n})$.
   Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k$.
2. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, tel que $f(c) = f(c+\frac{1}{n})$

Exercice 21.

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) + tg(x)$$

1. Justifier la définition de h.
2. Montrer que h est continue.
   (Ind : montrer que h est Lipschitzienne)

Exercice 22.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I$, $|f(x)| = 1$.
Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$

Exercice 23.

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et ayant une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et l (l exclu).

Exercice 24.

Trouver toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x^2) = f(x)$

Exercice 25.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissante telle que $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ f(f(x))=x$.
Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ f(x)=x$.

Exercice 26.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est localement croissante si $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists\varepsilon>0$ tel que $f_{/]x-\varepsilon,x+\varepsilon[}$ est croissante.
Montrer que si f est localement croissante alors elle est croissante.

Exercice 27.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ non identiquement nulle,continue en 0 et telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1. Montrer que $f(0)=0$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{Z}\,,\ f(n)=nf(1)$.
4. Montrer que $\forall r\in\mathbb{Q}\,,\ f(r)=rf(1)$
5. Montrer que $f=f(1)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 28.

Soient $f,g:[0,1]\to[0,1]$ continues telles que $g\circ f=f\circ g$.
Monter qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=g(c)$.

Exercice 29.

pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x-1$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n\in\mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n)=0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers $\frac{1}{2}$.