

Matrices et applications linéaires

Exercice 1.

Vérifier que chacune de ces applications est linéaire de E dans F , et donner les matrices associées relativement aux bases canoniques de E et F :

1. $f(x, y, z) = (2x + z, x + 2y - z, z, 3y - 4z)$, $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^4$

2. $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & y \\ z & y & x \end{pmatrix}$, $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

3. $f(A) = {}^t A$, $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

4. $f(A) = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}, \text{tr } A)$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^{n+1}$

Exercice 2.

Déterminer les applications linéaires f et g canoniquement associées aux matrices A et B respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Quelle est la matrice de $g \circ f$ et de $f \circ g$ relativement aux bases canoniques.

Exercice 3.

Soit f l'endomorphisme du \mathbb{R} espace vectoriel \mathbb{R}^3 dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin t \\ -1 & 0 & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que $f^3 = 0$.

2. On pose $e'_1 = e_1 \cos t + e_2 \sin t$, $e'_2 = f(e_1)$ et $e'_3 = f(e_2)$.

Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

Déterminer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 4.

On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associée à A .

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
Pour chacune de ces valeurs déterminer un vecteur X tel que $AX = \lambda X$ et dont la deuxième composante vaut 1.
2. On pose $e_1 = (3, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer la matrice B de f dans la base (e_1, e_2, e_3) .
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) , exprimer une relation entre A, B et P .
5. Calculer B^n , puis A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et $B = A - 2I_3$

- 1.1 Calculer, B^2, B^3 , en déduire B^n , pour $n \in \mathbb{N}$.
- 1.2 Calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites de nombres réels telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$$

Donner l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0 .

Exercice 6.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si ${}^t M = M$ et antisymétrique si ${}^t M = -M$.

Montrer que l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n et celui des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donner leurs dimensions.

Exercice 7.

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Où x, y et $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

Notons $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ la **trace** de A .

1. Montrer qu'ils existent deux vecteurs colonnes U et V telle que $A = U^t V$.

2. Montrer que $\text{tr}(A) = {}^t V U$.

3. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$.

4. Soit $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \text{Tr}(A)X\}$ et
 $G = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$.

4.1 Justifier que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

4.2 Donner la dimension de G .

4.3 Montrer que si $\text{tr}(A) \neq 0$, alors $F \cap G = \{0\}$ et que F est une droite vectoriel, et montrer dans ce cas que

la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \text{tr} A \end{pmatrix}$

Exercice 9.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t X X = 0$, montrer que $X = 0$.

2. Montrer que $\ker A = \ker {}^t A A$.

3. En déduire que $\text{rg} A = \text{rg} {}^t A A$

Exercice 10.

Soient E un \mathbb{K} ev de dimension $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $1 \leq j \leq n$, on pose $e_j =$

$$\sum_{i=1}^j e_i. \text{ Soit } \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \text{ soit enfin } f \in \mathcal{L}(E) \text{ telle que la matrice de } f \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f(e_j)$ pour $1 \leq j \leq n$
2. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E . Quelle est la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}'
3. Montrer que $A = (\alpha - \beta)I_n + \beta J$ où J est une matrice à déterminer
4. En déduire A' la matrice de f dans \mathcal{B}'

Exercice 11.

Soit E le \mathbb{R} ev \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $u_1, u_2, u_3 \in E^*$ définis par :

$$u_1(x, y, z) = x + y + z$$

$$u_2(x, y, z) = x - y + z$$

$$u_3(x, y, z) = x + y - z$$

On considère l'application linéaire f de E dans E^* telle que $1 \leq \forall i \leq 3 f(e_i) = u_i$

1. Donner $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*}(f)$
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse
3. En déduire que $S = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E^*
4. Trouver une base C de E telle que $C^* = S$

Exercice 12.

Soit $E) \mathbb{K}_n[X]$, et f l'endomorphisme de E définie pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ par $f(P) = P(X + 1)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E .
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique. On note A cette matrice.
3. Justifier que A est inversible, et donner son inverse.

Exercice 13.

Soient E un \mathbb{R} ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$

1. Montrer que $\ker f \cap \ker(f^2 + id_E) = \{0\}$, $\ker f \neq \{0\}$ et $\ker(f^2 + id_E) \neq \{0\}$
2. Soit x un élément non nul de $\ker(f^2 + id_E)$. Montrer qu'il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$, en déduire que $(x, f(x))$ est libre
3. Calculer $\dim(\ker f)$ et $\dim(\ker(f^2 + id_E))$
4. Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 14.

Calculer le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2n-1 \\ n & n+1 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

Exercice 15.

Soient E un \mathbb{K} ev de dimension n , f un endomorphisme de E de rang 1 et A la matrice de f dans une base \mathcal{B}

1. Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n - 1$ premières colonnes sont nulles
2. En déduire que $f^2 = \text{tr}(f)f$

Exercice 16 (Matrice de rotation hyperbolique).

Pour $t \in \mathbb{R}$ on note r_t l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch } t & \text{sh } t \\ 0 & \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix}$,

une telle application s'appelle une **rotation hyperbolique**.

1. Déterminer l'endomorphisme r_0 .
2. Calculer $R_t R_{-t}$, et en déduire que r_t est un automorphisme.
3. Montrer que la composée de deux rotations hyperboliques est une rotation hyperbolique.
4. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$ **hyperboloïde a deux nappes**. Montrer que $r_t(H) = H$.

Exercice 17.

Soit E un \mathbb{K} ev de dimension n , p un projecteur de E .

Montrer que $rg(p) = \text{tr}(p)$.

On pourra utiliser une base adaptée à la décomposition $E = \ker p \oplus \text{Im } p$

Exercice 18.

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence n , c'est-à-dire $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 19.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables.

1. Montrer que A est inversible si, et seulement si, B l'est.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables.
3. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.
☞ Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ est la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_d A^d$.

Exercice 20.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(A - 6I_3)(A^2 - 3I_3) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^n = P_n(A)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer P_n en fonction de n , et en déduire une expression de A en fonction de n .

Exercice 21.

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note $O_r(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R} / {}^tAA = I_r\}$.

Si n, p et q sont des entiers tels que $n = p + q$, on désigne par $I_{p,q}$ la matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $O_{p,q} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tMI_{p,q}M = I_{p,q}\}$, on note aussi $K_{p,q} = O_{p,q} \cap O_n(\mathbb{R})$.

Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une bijection entre $K_{p,q}$ et $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})$.

1. Soit $(A, B) \in O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})$, et M la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in K_{p,q}$.

2. Soit $M \in K_{p,q}$.

2.1 Justifier que M est inversible et que $M^{-1} = {}^tM$.

2.2 Vérifier que les deux matrices M et $I_{p,q}$ commutent.

On note M sous forme de blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

2.3 En effectuant des produits par blocs, montrer que $B = 0$ et $C = 0$.

2.4 Montrer que $A \in O_p(\mathbb{R})$ et $D \in O_q(\mathbb{R})$.

3. Conclure.