Probabilités

Exercice 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé, et $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{T} \ / \ p(A)(1 - p(A)) = 0\}$.
Montrer que $\mathscr{G}$ est une tribu sur Ω.

Exercice 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable, Ω' un ensemble et $X : \Omega' \to \Omega$ une application. Montrer que $X^{-1}(\mathscr{T}) := \{X^{-1}(A) \ / \ A \in \mathscr{T}\}$ est une tribu sur Ω'.

Exercice 3 (Formule de Poincaré)**.**

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n$ des événements.
Montrer que

$$p(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} p(\cap_{j=1}^k A_{i_j})$$

Application : un facteur distrait distribue le courrier au hasard dans une rue comptant n numéros. En supposant qu'il dépose exactement une lettre par habitation et que, sur les n distribuées au total, une et une seule soit destinée à une habitation donnée, quelle est la probabilité que personne ne reçoive de lettre lui ayant été explicitement adressée ? Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4.

Soit $(A_n)_n$ une suite de partie d'un ensemble Ω . On pose

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{m\ge n} A_m \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\ge n} A_m$$

On dit que la suite $(A_n)_n$ converge si $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$. Lorsque c'est e cas on définit $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n := \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$

1. Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$
2. Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} A = \{x \in \Omega \ / \ x$ appartien à tous les A_n sauf peut être à un nombre fini $\}$ et que $\limsup\limits_{n\to+\infty} A = \{x \in \Omega \ / \ x$ appartien à une infinité de $A_n\}$
3. Montrer que toute suite monotone de partie de Ω est convergente. On déterminera sa limite.
   Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé.
4. Montre que si $(A_n)_n$ est une suite d'événements de $\mathscr{T}$ alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} A$ sont des événements (donner une interprétation probabiliste de ces deux événements).
5. Montrer que si $(A_n)_n$ est une suite d'événements telle que la série $\sum p(A_n)$ converge, alors $p(\limsup\limits_{n\to+\infty} A) = 0$.

Exercice 5.

Montre que si $(A_n)_n$ est une suite d'événements presque certain, alors l'événement $\cap_n A_n$ est un événement presque certain.

Exercice 6.

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $A_n = \{$Le n-ème lancer donne Pile$\}$.

1. Décrire par une phrase chacun des événement suivant :
   $B_1 = \bigcap_{n=4}^{+\infty} A_n$, $B_2 = (\bigcap_{n=1}^{4} \overline{A_n}) \cap (\bigcap_{n=5}^{+\infty} A_n)$, $B_3 = \bigcup_{n=6}^{+\infty} A_n$.
2. Écrire à l'aide des A_n les événements :
   $A =$ "On obtient au moins une fois Pile après le n-ième lancer".
   $B =$ "On obtient que des Piles a partir d'un certain lancer "

Exercice 7.

On considère une urne contenant 5 boules blanches et 9 boules rouges. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité de l'événement "blanc , blanc , rouge"

Exercice 8.

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé. A , B et C trois événements mutuellement indépendants de probabilités différentes de 0 et 1.

1. Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.
2. Montrer que $p(B \cup C) < 1$.

Exercice 9.

Chaque coefficient de l'équation trigonométrique $a \tan x = b$ est déterminé en lançant un dé et en prenant le nombre de points obtenus. Trouver la probabilité que l'équation donnée possède les solutions $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ où k est un nombre entier.

Exercice 10.

Un livre contient 4 erreurs numérotés de 1 à 4, et est relu par une suite de lecteurs pour correction. A chaque relecture , chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture. Combien faut-il de relecture pour que cette probabilité soit supérieure à $\frac{9}{10}$?

Exercice 11.

On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
2. On suppose qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne numéro k ?

Exercice 12.

On dispose d'un dé à six faces et d'une pièce de monnaie. Après avoir lancer n fois le dé, on lance la pièce autant de fois qu'on a obtenu le 5 avec le dé. On note N le nombre de 4 obtenus avec le dé et m le nombre de Pile obtenus avec la pièce.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire N ?
2. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire m conditionnée par l'événement $N = r$.
3. Montrer que m suit la loi $\mathscr{B}(n, \frac{1}{12})$.

Exercice 13 (Perte de mémoire)**.**

Si $X \sim G(p)$, montrer que
$$P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$$
. Cette propriété est généralement appelée propriété de perte de mémoire, ou encore propriété d'absence de mémoire.

Exercice 14.

Dans une expérience, l'événement A peut survenir avec une probabilité p. On répète l'expérience n fois de manière indépendante. Trouver la valeur moyenne et la variance de la variable aléatoire X qui représente le nombre d'apparitions de A.

Exercice 15.

Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $\{0,1,2,\ldots\}$. Montrer que $E(X)$ est finie si et seulement si la série $\sum_{n} p(X>n)$ converge, dans ce cas montrer que $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} p(X>n)$

Exercice 16.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . Un joueur tire une boule au hasard et gagne une somme X égale au numéro de boule tirée. Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 17.

On admet que le nombre de clients d'un bureau de poste au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. On note par p la probabilité qu'une personne pénétrant dans ce bureau de poste soit un homme.

1. Montrer que le nombre des hommes et celui des femmes parmi les clients quotidiens sont des variables aléatoires $X \sim P(\lambda p)$ et respectivement $Y \sim P(\lambda(1 — p))$.
2. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 18.

Une entreprise recrute un cadre. n candidats se présentent pour le poste (n entier naturel non nul fixé). Chacun d'entre eux passe un teste et le premier qui y satisfait est engagé. La probabilité qu'a un candidat de réussir le test est $p \in]0,1[$. On note $q=1-p$.
On définit la variable aléatoire X par $X=k$ si le k-ième candidat qui se présente est engagé, et $X=n+1$ si aucun des n candidats n'est engagé.

1. 1.1 Déterminer la loi de X.
   1.2 Vérifier que $\sum_{k=1}^{n+1} P(X=k)=1$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
3. En déduire la valeur de $E(X)$.
4. Comment doit-on choisir p pour avoir une chance sur deux de recruter l'un des n candidats ?

Exercice 19.

Un jouet se trouve caché dans l'une des N boîtes fermées où un enfant le cherche. Celui-ci ouvre une boîte au hasard et recommence jusqu'à ce qu'il trouve le jouet. On suppose qu'à chaque tentative il a oublié le résultat de toutes les précédentes. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X égale au nombre de tentatives effectuées jusqu'à la découverte du jouet, puis calculer son espérance.
Préciser le nombre N_0 de boîtes si l'enfant a environ trois chances sur quatre de trouver le jouet à l'issue de ses trois premières tentatives.

Exercice 20.

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle F définie par $F = \dfrac{1}{T(T+1)(T+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance puis la calculer.
4. X admet-il une variance ? Justifier.

Exercice 21.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisés $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soient $i \in [\![1, N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $p(X_i \leq n)$, puis $p(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.
   - 2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $p(Y > n)$.
     En déduire $p(Y \leq n)$, puis $p(Y = n)$.
   - 2.2 Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 22.

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, p)$ un espace probabilisé.

1. 1.1 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendants, on suppose qu'ils suivent la loi de Poisson de paramètre respective λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

   1.2 En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. 2.1 Soient X et Y deux variables aléatoires.
   On suppose que Y suit la loi de Poison de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.

Exercice 23.

Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4 et l'on effectue deux tirages successifs sans remise, notant X (resp. Y) la v.a. indiquant le chiffre marqué sur la boule tirée au premier (resp. second) tirage. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $X + Y$.

Exercice 24.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules .
Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.

2. 2.1 Déterminer la probabilité $p(X = 2)$.

   2.2 Déterminer la loi de probabilité de X.

3. 3.1 Calculer $E(X)$.

   3.2 Déterminer $\lim_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 26.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$p((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. 2.1 Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   2.2 Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $p(X=Y)$.

Exercice 27.

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 28.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
2. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} Y_k$.
   Prouver que pour tout $a \in]0,+\infty[$,
   $$p(\frac{S_n}{n} - E(Y_1)) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$$
3. Application :
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45.
   Ind : Considérer la suite Y_i de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i$ième tirage.

Exercice 29.

On jette deux dés à six faces numérotées de 1 à 6 et on note X la v.a. qui représente la somme des deux chiffres obtenus et Y la v.a. qui est égale au plus grand de ces deux chiffres.

1. Déterminer la loi de probabilité du couple (X,Y) puis calculer $E(X)$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y pour $X=6$, puis son espérance $E(Y|X=6)$.

Exercice 30.

Où il est prouvé qu'il faut avoir beaucoup de chance pour gagner un tiercé...
Il y a vingt chevaux au départ du Prix d'Australie, la grande course pour le tiercé de dimanche prochain.
Seule nous intéresse l'arrivée des trois premiers chevaux. Gagner le tiercé dans **l'ordre** consiste à trouver le nom et l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux. Gagner le tiercé dans le **désordre** consiste, seulement à trouver le nom des trois premiers chevaux.
En jouant trois numéros, quelle est la probabilité de gagner dans l'ordre, dans le désordre ?

Exercice 31.

Le sultan dit à Ali Baba : « Voici 2 urnes, 4 boules blanches (b) et 4 boules noires (n). Répartis les boules dans les urnes, mais je rendrai ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche.»

1. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la 1re urne et les 4 noires dans la 2e ?
2. Idem avec $2b+2n$ dans la 1re urne et $2b+2n$ dans la 2e.
3. Idem avec $3b$ dans la 1re urne et $1b+4n$ dans la 2e.
4. Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances ?

Exercice 32.

Une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose X « le nombre d'essais pour ouvrir la porte ».

1. Calculer la loi de probabilité de X, c'est-'a-dire $p(X=k)$ avec $k=1,2,3,4$.
2. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 33.

Un canal de transmission d'information ne peut traiter que des 0 et des 1. A cause de perturbations dues à l' électricité statique chaque chiffre transmis l'est avec une probabilité d'erreur de $0,2$. Admettons que l'on veuille transmettre un message important limité à un signal binaire. Pour éviter une erreur on transmettra 00000 au lieu de 0 et 11111 au lieu de 1. Si le récepteur décode suivant la règle de la majorité, quelle est la probabilité que le message soit mal interprété ?

Exercice 34.

On considère une série d'épreuves indépendantes. A chaque épreuve, on observe un « succès » avec probabilité p et un « échec » avec probabilité $1-p$.
Soit X la variable aléatoire discrète suivante :
X = nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le 1er « succès ».

1. Calculer la loi de probabilité de X. Cette loi est dite loi géométrique.
2. Vérifier que $E(X) = \frac{1}{p}$.

Exercice 35 (Le problème des allumettes de Banach)**.**

Un mathématicien se trouve être également fumeur de pipe et il porte à tout moment deux boîtes d'allumettes, une dans chacune de ses poches gauche et droite. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumettes, il a une chance sur deux d'aller la chercher dans sa poche gauche et autant pour la poche droite. Il découvre subitement que la boîte tirée est vide. Les deux boîtes contenaient au départ N allumettes chacune. Trouver la probabilité qu'il lui reste encore k allumettes dans l'autre boîte, $k = 0, 1, \dots, N$.