Principe de récurrence

Exercice 1.

Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 2.

1. Montrer, pour tout réel $x > 0$, que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \ldots, a_n \in]0, +\infty[$.
   Montrer que $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_{n-1}} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1} \geq n$.

Exercice 3.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Exercice 4.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante

$$\mathscr{P}(n) : \ 2^n > n^2$$

1. Montrer que $\forall n \geq 3$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$
2. Pour quelles valeurs de n , $\mathscr{P}(n)$ est vraie ?

Exercice 6.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(n+1)! \geq \sum_{k=0}^{n} k!$$

Exercice 7.

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les propriétés suivantes

1. $1 \in A$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ que,
   $f(-x) = -f(x)$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$; $f(n) = nf(1)$.
4. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{Z}$; $f(n) = nf(1)$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$;
   $f(x) = xf(1)$.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$(f o f)(n) < f(n+1)$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq n$, $n \leq f(x)$
   Ind : par récurrence sur n
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \{f(x) \ / \ n \leq x\}$.
   a. Montrer que A admet un plus petit élément
   b. Soit $a \geq n$ tel que $f(a) = \min A$. Monter que $a = n$
      Ind : par l'absurde

Exercice 10.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

Exercice 11.

On veut montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+ ; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$$

1. Montrer $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$
2. On suppose $\mathscr{P}(n)$ pour $n \geq 2$

   Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leq n+1$
3. On suppose qu'il existe $k \in [|1, n+1|]$ tel que $x_k > 1$
   - 3.1 Montrer qu'il existe $l \in [|1, n+1|]$ tel que $x_l \leq 1$
   - 3.2 Montrer que

     $$\Big(\prod_{i=1, i\neq k, i\neq l}^{n+1} x_i\Big)(x_k + x_l - 1) \leq 1$$
4. Conclure.