Nombres réels

Exercice 1.

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ montrer que :

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \Leftrightarrow \text{Les } x_i \text{ ont le même signe}$$

Exercice 2.

Soient x et y deux nombres réels avec $x \neq 0$ et $|x - y| < |x|$. Montrer que y est non nul et que x a le signe de y.

Exercice 3.

Montrer que

$$A = \{\frac{nm}{(n+m)^2} \ , \ n, m \in \mathbb{N}^*\}$$

admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice 4.

Soit $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n+1} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.
Montrer que A est bornée, déterminer $\inf A$ et $\sup A$

Exercice 5.

Montrer les inégalités suivantes :

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère $A_n = \{k + \frac{n}{n} \ , \ k \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Montrer que A_n possède une borne inférieure et que $\inf A_n = \inf\{k + \frac{n}{k} \ , \ 1 \leq k \leq n\}$.
2. Montrer que $\inf A_n \geq 2\sqrt{n}$

Exercice 7.

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Comparer $\inf A$ et $\inf B$, puis $\sup A$ et $\sup B$

Exercice 8.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée, on note $\alpha = \sup A$. On suppose que $\alpha \notin A$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\alpha - \varepsilon, \alpha[$ contient une infinité d'éléments de A.

Exercice 9.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides, telles $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$ on ait $x \leq y$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure que $\sup A \leq \inf B$.
2. Montrer que $\sup A = \inf B$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $b - a \leq \varepsilon$.

Exercice 10.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées, on note
$A + B = \{a + b \ / \ a \in A, b \in B\}$.
Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

Exercice 11.

Soit A une partie non vide majorée de bR, et $x \in A$ tel que $A \backslash \{x\}$ est non vide.
Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \backslash \{x\}) = \sup A$.

Exercice 12.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides.

1. Montrer que si A et B sont majorées, alors $A \cup B$ est majorés et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
2. Montrer que si A et B sont minorées, alors $A \cup B$ est minorée et que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

Exercice 13.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}$, on note $A(x) = \{|x-a| \ / \ a \in A\}$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x)$ admet une borne supérieure.
   On note $f(x) = \inf A(x)$.
2. Montrer que :
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$
3. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $f = 0$.
4. Montrer que :
   $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |x-y|$

Exercice 14.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée.
On note $B = \{|x-y| \ / \ x, y \in A\}$
Montrer que B admet une borne supérieure et $\sup B = \sup A - \inf A$

Exercice 15.

Soit $A = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ / \ p, q \in \mathbb{N}^*\}$

1. Montrer que A est bornée.
2. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$

Exercice 16.

Soit $A = \{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$

1. Montrer que A est borné.
2. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$

Exercice 17.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante.
On pose $A = \{x \in [0,1] \ / \ x \leq f(x)\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure α.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$

Exercice 18.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ***non vide*** et vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) Si $x \in A$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset A$

ii) Si $(\forall \epsilon > 0,]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap A \neq \emptyset)$ alors $x \in A$.

Le but de cet exercice est de montrer que $A = \mathbb{R}$.
Soit $a \in A$ on pose $I = \{x \in A / [a, x] \subset A\}$ et $J = \{x \in A / [x, a] \subset A\}$.

1. Montrer que I et J sont des parties non vides de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
3. On suppose que I est **majorée**
   - 3.1 Montrer que I admet une borne supérieure α
   - 3.2 Montrer que $\alpha \in A$
   - 3.3 En déduire l'existence $\eta > 0$ tel que $[\alpha, \alpha + \eta] \subset A$.
   - 3.4 Trouver une contradiction.
4. Déduire des questions précédentes que $[a, +\infty[\subset A$
5. Montrer de même façon que $]-\infty, a] \subset A$.Conclure

Exercice 19.

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose $\alpha = \inf A$ et pour $\varepsilon > 0$,
$B_\varepsilon = A \cap]-\infty, m+\varepsilon]$.
Montrer que B_ε admet une borne inférieure et que $\inf B_\varepsilon = m$.

Exercice 20.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto [x]$ est croissante.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que
   - 2.1 Si $x \notin \mathbb{Z}$; $[-x] = -[x] - 1$,
   - 2.2 Si $x \in \mathbb{Z}$, $[-x] = -x$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto x - [x]$ est périodique.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $\alpha = [x+y] - [x] - [y]$.
   Montrer que $\alpha^2 = \alpha$.

Exercice 21.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.Montrer que :

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}) \geq n^2$$

Exercice 22.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a+1<b$.
On pose $A = \{n \in \mathbb{Z},\ \ a \leq n \leq b\}$.

1. Montrer que A est non vide.
2. Monter que A admet un plus grand et plus petit élément, que l'on déterminera.
3. Montrer que $\mathrm{Card}(A) = [b] + [-a] + 1$.

Exercice 23.

1. Montrer que pour tous réels x, y on a :

$$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$$

2. Montrer que pour tout entier relatif on a :

$$\left[\frac{n+n}{2}\right] + \left[\frac{n-m+1}{2}\right] = n$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2] = 4n+1$$

Indication : on pourra montrer que $[2\sqrt{n(n+1)}] = 2n$.

Exercice 24.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [x + \frac{i}{n}] - [nx]$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{1}{n}[,\ f(x) = 0$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{n-1} [x + \frac{i}{n}] = [nx]$

Exercice 25.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation
$$[3x] = [4x]$$

Exercice 26.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que
$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. on considère
$A = \{ \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| \ , \ x \in \mathbb{R} \}$.

1. Montrer que A admet une borne inférieure.
2. Déterminer $\inf A$.

Exercice 27 (Nombres dyadiques)**.**

On appelle nombre dyadique tout nombre réel de la forme $\frac{m}{2^n}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.