Corrigé

Contrôle (Algèbre 4)

u A

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

LPEM

Notations

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.
☞ On désigne par $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des endomorphismes de E polynôme en u c'est-à-dire $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \ / P \in \mathbb{K}[X]\}$.
☞ On désinge par $\mathscr{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u c'est-à-dire $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \ / uv = vu\}$.

Questions de cours

Cours

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel de dimension n et p un projecteur de E i.e $p^2 = p$.

1. Le polynôme $X^2 - X = (X-1)X$ est annulateur de p. Puisque $X \wedge (X-1) = 1$, par le Lemme des noyaux, on a $E = \ker(p^2 - p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker p$.

2. Soit $x \in \ker(p - \mathrm{Id}_E)$, donc $p(x) - x = 0$, par suite $x = p(x) \in \operatorname{Im} p$. D'où $\ker(p - \mathrm{Id}_E) \subseteq \operatorname{Im} p$.
Soit $x \in \operatorname{Im} p$, alors il existe $t \in E$ tel que $x = p(t)$, et on a donc $(p - \mathrm{Id}_E)(x) = p(x) - x = p^2(t) - p(t) = 0$. Donc $x \in \ker(p - \mathrm{Id}_E)$. Il en résulte alors que $\ker(p - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im} p$.

3. Notons $r = \operatorname{rg} p$, de sorte que $r = \dim \operatorname{Im} p$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la somme $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ c'est-à-dire $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\operatorname{Im} p$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\ker p$. Pour $1 \leq i \leq r$, on a $p(e_i) = e_i$ car $\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$, et pour $r+1 \leq i \leq n$, on a $p(e_i) = 0$ car $e_i \in \ker p$. La matrice de p dans la base $\mathscr{B}$ est alors de la forme

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Où I_r désigne la matrice identité d'ordre r. Il vient alors que $\operatorname{tr} p = r = \operatorname{rg} p$.

Exercice 2 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 2-X & -2 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & -2 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\left((2-X)(-1-X)+2\right) = -X(1-X)^2\end{aligned}$$

En particulier $\mathrm{Sp}(A) = \{0,1\}$.

2. Les sous espaces propres de A :
Le sous espace propre de A associé à la valeur propre 0 :
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2y-2z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z$ et $x = -y-z = -2z$. Donc

$$\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

Le sous espace propre de A associé à la valeur propre 1 :
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= x \\ 2y-2z &= y \\ y-z &= z \end{cases} \Leftrightarrow y+z = 0$ et $y-2z \Leftrightarrow y = z = 0$. Donc

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).}$$

PROBLÈME

Dans tout le problème E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E.

Première partie : Généralités

1. On a $0u = u0$ donc $0 \in \mathscr{C}(u)$. Soient $v, w \in \mathscr{C}(u)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$(v+\lambda w)u = vu + \lambda wu = uv + \lambda uw = u(v+\lambda w)$$

Donc $v + \lambda w \in \mathscr{C}(u)$. Ainsi $\mathscr{C}(u)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
Soit $v, w \in \mathscr{C}(u)$. On a

$$(vw)u = v(wu) = v(uw) = (vu)w = (uv)w = u(vw)$$

Donc $vw \in \mathscr{C}(u)$. Finalement, $\mathrm{Id}_E\, u = u\,\mathrm{Id}_E$ implique $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{C}(u)$. Ceci montre que $\mathscr{C}(u)$ est une sous algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

2. Pour $P = 0$ (le polynôme nulle) on a $P(u) = 0$, donc $0 \in \mathbb{K}[u]$.
Soit $P(u), Q(u) \in \mathbb{K}[u]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (Notons que $P, Q \in \mathbb{K}[X]$). On a

$$P(u) + \lambda Q(u) = (P + \lambda Q)(u) \in \mathbb{K}[u]$$

Donc $\mathbb{K}[u]$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
Soit $P(u), Q(u) \in \mathbb{K}[u]$, on a

$$P(u)Q(u) = (PQ)(u) \in \mathbb{K}[X]$$

Pour $P = 1$, on a $P(u) = \mathrm{Id}_E$, donc $\mathrm{Id}_E \in \mathbb{K}[u]$.
On en déduit alors que $\mathbb{K}[u]$ est une sous algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

3. Soit $P(u) \in \mathbb{K}[u]$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. Posons $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$.

On a

$$P(u)u = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k u^k\right) u = \sum_{k=0}^{m} a_k u^{k+1} = u\left(\sum_{k=0}^{m} a_k u^k\right) = uP(u)$$

Donc $P(u) \in \mathscr{C}(u)$. D'où $K[u] \subseteq \mathscr{C}(E)$.

4. Soit $P_1(u) \in \mathbb{K}[u]$ avec $P_1 \in \mathbb{K}[X]$. D'après le théorème de la division euclidienne de P_1 par le polynôme caractéristique χ_u, il existe un couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$P_1 = Q\chi_u + R \text{ et } \deg R \leq \deg \chi_u - 1 = n - 1$$

On a donc $P_1(u) = Q(u)\chi_u(u) + R(u)$, en combinant ce qui précède avec le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient $P_1(u) = R(u) \in \{P(u) \ / \ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$. Clairement $\{P(u) \ / \ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\} \subseteq \mathbb{K}[u]$. Il en résulte alors que $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \ / \ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$.

Deuxième partie :
Cas où u admet n valeurs propres distinctes

On suppose dans cette partie que u admet n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Pour $1 \leq i \leq n$, notons e_i un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i.

5. Comme $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, il est donc libre. Puisque le nombre d'éléments de $\mathscr{B}$ est égale à la dimension de E, il s'agit alors d'une base de E.

6. Puisque $\deg \chi_u = n$ et admet n racines distinctes, χ_u est scindé à racines simples. Pour $1 \leq i \leq n$, on a $1 \leq \dim E_{\lambda_i}(u) \leq 1 = m_{\lambda_i}$, il vient alors que $\dim E_{\lambda_i}(u) = 1$. Puisque e_i est un vecteur non nul de $E_{\lambda_i}(u)$, il en résulte que $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}(e_i)$.

7. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$, donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale, plus précisément,

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

8. On a $u(v(e_i)) = v(u(e_i)) = v(\lambda_i e_i) = \lambda_i v(e_i)$, donc $v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$.

9. Pour $1 \leq i \leq n$, on $v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$ et $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}(e_i)$, donc $v(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_i)$, il existe alors $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_i) = \alpha_i e_i$.

10. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(X - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_k)}$$

10.1 Soit $1 \leq i \leq n$. $L_i(\lambda_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(\lambda_i - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_k)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} 1 = 1$

$\boxed{10.2}$ Soit $1 \leq i, j \leq n$, avec $i \neq j$. Dans ce cas on a $L_i = \dfrac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{n} \dfrac{(X-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_k)}$. Donc

$$L_i(\lambda_j) = \frac{\lambda_j-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{n} \frac{(\lambda_j-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_k)} = 0$$

$\boxed{10.3}$ Soit L le polynôme défini par $L = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k L_k$.

$L(\lambda_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k L_k(\lambda_i) = \alpha_i L_i(\lambda_i) + \sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n} \alpha_k L_k(\lambda_i)$. Notons que $L_k(\lambda_i) = 0$ si $k \neq i$, et donc $\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n} \alpha_k L_k(\lambda_i) = 0$. Par suite $L(\lambda_i) = \alpha_i L_i(\lambda_i) = \alpha_i$.

$\boxed{11.}$ Soit $1 \leq i \leq n$. Puisque e_i est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i, on a donc $L(u)(e_i) = L(\lambda_i)e_i$ et on aussi $L(\lambda_i) = \alpha_i$. D'où $L(u)(e_i) = L(\lambda_i)e_i = \alpha_i e_i$.

$\boxed{12.}$ D'après ce qui précède pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $L(u)(e_i) = \alpha_i e_i = v(e_i)$. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ forme une base de E, il vient que $L(u) = v$.

$\boxed{13.}$ D'après le résultat de la question 3, On a $\mathbb{K}[u] \subseteq \mathscr{C}(u)$.
Réciproquement, si $v \in \mathscr{C}(u)$, d'après le résultat de la question précédente, il existe un polynôme L tel que $v = L(u)$, donc $v \in \mathbb{K}[u]$. Ou encore $\mathscr{C}(u) \subseteq \mathbb{K}[u]$. On en déduit alors que $\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

END