Thème : Compacité

1 Espace compact

1.1 Compacité dans les espaces métriques

Définition 1.1 (Borel-Lebesgue)

Un espace topologique X est compact s'il est séparé et de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Remarque : Un espace métrique est toujours séparé, il est donc compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.
Un espace vectoriel normé non nul n'est pas compact.
Tout espace métrique fini est compact.
Soit X un ensemble non vide et d la distance discrète sur X. Alors X est compact si et seulement s'il est fini.

Proposition 1.2

Un espace métrique est compact si, et seulement si, de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Proposition 1.3

Une réunion finie de parties compactes d'un espace métrique est compacte.
Une intersection quelconque de parties compactes d'un espace métrique est compactes.

Définition 1.4

Un espace métrique X est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense.

Théorème 1.5

Un espace métrique compact est séparable.

1.2 Caractérisation séquentielle

Théorème 1.6 (Bolzano-Weierstrass))

Un espace métrique X est compact si, et seulement si, toute suite de X admet une sous suite convergente.

Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.

Proposition 1.7

1. *Toute espace métrique compact est complet.*
2. *Toute espace métrique compact est borné.*
3. *Une partie d'un espace compact est compacte si, et seulement si, elle est fermé.*

Proposition 1.8

Soit Y une partie d'un espace métrique X. Si Y est compacte alors il est bornée et fermé.

Si une partie d'un espace métrique est fermé bornée il n'est pas nécessairement compacte: Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance discrète, $\mathbb{N}$ est une partie fermé bornée mais il est n'est pas compacte.

Proposition 1.9

Soient X, Y deux espaces métriques compacts. Alors l'espace produit $X \times Y$ muni de la métrique produit est compact.

Remarque: Le produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts (muni de la métrique produit) est un espace compact.

1.3 Compacité dans un espace vectoriel normé

Théorème 1.10

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie de E. Alors A est compacte si, et seulement si, elle est fermé et bornée.

Exemple : Le groupe orthogonal O_n est compact.

Corollaire 1.11

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalents.

Théorème 1.12 (de Riesz)

Soit E un espace vectoriel normé. Les deux propriétés suivantes sont équivalents:

1. *La boule unité fermé de E est compacte.*
2. *E est de dimension finie.*

Remarque : Un espace vectoriel E est de dimension finie si, et seulement si, il existe $x \in E$ et $r > 0$ tel que $B_f(x, r)$ soit compacte.
Ce théorème (de Riesz) permet de démontrer qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie.

2 Continuité et compacité

Théorème 2.1

Soit X un espace métrique compact et Y un espace métrique. Si $f : X \to Y$ est une application continue alors $f(X)$ es tune partie compacte de Y.

Corollaire 2.2

Toute application continue d'un espace métrique compact et à valeurs dans un espace métrique et bornée.

Proposition 2.3

Soit X un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Proposition 2.4 (point fixe)

Soit X un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application telle: $\forall x \neq y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f admet un unique point fixe.

Théorème 2.5 (de Heine)

Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique et $f : X \to Y$ une application continue. Alors f est uniformément continue.

Théorème 2.6 (de D'Alembert Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

3 Compacité dans les espaces des fonctions

Définition 3.1

Soit X une espace métrique et A une partie de X. On dit que A est relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties relativement compactes sont les parties bornées.

Proposition 3.2

Soit X un espace métrique et A une partie de X. Alors A est relativement compacte si, et seulement si, toute suite d'éléments de A possède une sous suite convergente dans X.

Si X, Y sont des espaces métriques, on note $C(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y. De de plus Y est un espace vectoriel normé, on muni $C(X,Y)$ de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}\|f(x)\|$.

Définition 3.3

Soit X un espace métrique compact et E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit A une partie non vide de $C(X,E)$. '

1. *On dit que A est équicontinue en x si;*
   $\forall \exists > 0, \exists \eta > 0$ *tel que* $\forall y \in X,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.
2. *On dit que A est équicontinue sur X si il est équicontinue en chaque point de X.*

Théorème 3.4 (Ascoli)

Soit X un espace métrique compact et A une partie non vide de $C(X,\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les condition suivantes sont équivalentes;

1. *A est relativement compacte.*
2. *A est bornée et équicontinue.*

Théorème 3.5 (Weierstrass)

L'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $C([a,b],\mathbb{R})$.

Une application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\,dt = 0$. Alors $f = 0$.

L'hypothèse précédente est équivalente à; $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P(t) f(t)\,dt = 0$.

4 Exercices

Exercice 1

Un conséquence : Soit X un espace métrique compact et Y un espace métrique. Montrer que Si $f : X \to Y$ est continue et bijective alors f est un homéomorphisme.

Exercice 2

Soit X un espace métrique tel que toutes les boules fermés sont compactes.

1. Montrer que X est complet.
2. Montrer que les parties compactes de X sont les sous ensembles fermés bornés.

Exercice 3

Soit $(x_n)_n$ une suite convergente de limite x d'un espace métrique X. Montrer que $A = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de X.

Exercice 4

Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $C([0,1],\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont de classe $\mathscr{C}^1$.

1. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que l'application $F \to E$, $f \mapsto f'$ est continue.
2. En déduire l'existence de $C > 0$ tel que pour tout $f \in F$, $\|f'\| \le C\|f\|$.
3. Montrer que F est de dimension finie.

classe

Problème :
Opérateurs compacts

Définition 4.1

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ une application linéaire. On dit que T est un opérateur compact si $T(B(0,1))$ est relativement compacte. On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E à valeurs dans F, dans le cas $E = F$ on le note $K(E)$.

Première partie
Propriétés générales

1. Montrer que tout opérateur compact est continue.

2. Soit $T \in K(E,F)$ et $r > 0$. Montrer que $T(B(0,r))$ est compacte.

3. Soient K, K' deux compacts de E. Montrer que $K + K' := \{x + y / \ / \ \ x \in K, y \in K'\}$ est un compact de E.

4. Montrer que $K(E,F)$ est un sous espace vectoriel de $L_c(E,F)$.

5. Soient $T \in K(E)$ et $S \in L_c(E)$. Montrer que $TS, ST \in K(E)$.

6. Montrer si $T \in L_c(E,F)$ est de rang fini, alors il est compact.

Deuxième partie :

Dans cette partie E est un espace de Banach. Soit $T \in K(E)$ et $S = \mathrm{Id}_E - T$.

7. soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\ker S \cap B_f(0,1)$.

   7.1 Montrer que $(x_n)_n$ admet une sous suite extraite convergente vers un élément $x \in \ker S$.

   7.2 En déduire de $\ker S$ est de dimension finie.

8. Soit $y \in \overline{\mathrm{Im}\, S}$.

   8.1 Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que

   $$\lim_{n\to+\infty} (x_n - T(x_n)) = y$$

   8.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in \ker S$ tel que $\|x_n - z_n\| = d(x_n, \ker S)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = x_n - z_n$, et on suppose que la suite $(v_n)_n$ n'est pas bornée.

   8.3 Montrer que $(v_n)_n$ admet une sous suite extraite $(v'_n)_n$ telle que

   $$\lim_{n\to+\infty} \|v'_n\| = +\infty$$

   Pour n assez grand ($n \geq N$), on pose $u_n = \frac{v'_n}{\|v'_n\|}$.

   8.4 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S(u_n) = 0$.

   8.5 Montrer que $(T(u_n))_n$ admet une sous suite extraite convergente vers un élément $u \in \ker S$.

   8.6 En considérant la limite de $d(u_n, \ker S)$, trouver une contradiction, et conclure.

   8.7 Montrer que $\mathrm{Im}\, S$ est fermé.

Troisième partie:
Un opérateur à noyau

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ ($a < b$) et $h : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. Pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, on note $T(f)$ l'application $T(f) : [a,b] \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in [a,b]$ par $T(f)(x) = \displaystyle\int_a^b h(x,t) f(t)\, dt$.

9. Montrer que pour tout $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, $T(f) \in C([a,b],\mathbb{R})$.

10. Montrer que T est un opérateur continue.

11. Montrer que $T(B(0,1))$ est équicontinue.

12. En déduire que T est un opérateur compact.