Thème : Complétude

1 Espace métrique complet

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1.1

Soit (X,d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X est dite de Cauchy si: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
Une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente: Dans l'espace métrique $(\mathbb{Q}, |.|)$ la suite $\left(\frac{[2^n\sqrt{2}]}{2^n}\right)_n$ est de Cauchy, mais elle n'est pas convergente.

Proposition 1.2

Si $(x_n)_n$ est une de Cauchy ayant une valeur d'adhérence alors elle est convergente.

1.2 Espace complet

Définition 1.3

Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.

L'espace métrique $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet.
L'espace métrique $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet.

Proposition 1.4

Soit (X,d) un espace métrique complet et Y une partie de X. Alors Y est complet (muni de la distance induite) si, et seulement si, Y est fermé.

Proposition 1.5

Un produit fini d'espaces complets est un espace complet.

Exemple: $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces métriques complets.
Soit (X,d) un espace métrique et on note C_X l'ensemble de toutes les suites de Cauchy de X. On considère la relation d'équivalence $\sim$ définie sur C_X par $(u_n)_n \sim (v_n)_n$ si, et seulement si, $\lim_n d(u_n, v_n) = 0$. Pour $u, v \in C_X$, on pose $d'(\overline{u}, \overline{v}) = \lim_n (d(u_n, v_n))$. Ainsi d' est une distance sur $X' := C_X/\sim$

Théorème 1.6

Soit (X,d) un espace métrique. alors il existe un espace métrique complet (X', d') et une isométrie $i : X \to X'$ tel que $i(X)$ est dense dans X'. L'espace métrique (X', d') est unique à isométrie bijective près, il s'appelle le complété de X.

Le complété de $(\mathbb{Q}, |.|)$ est l'espace métrique $(\mathbb{R}, |.|)$.

1.3 Espace de Banach

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. La norme $\|.\|$ induit une distance sur E; $d(x,y) = \|x-y\|$, en particulier E est un espace métrique.

Définition 1.7

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit de Banach s'il est complet.

Exemple: Soit X un ensemble et $B(X,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les applications bornées de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Alors $B(X,\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Proposition 1.8

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Si E, F sont des espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires continues de E et à valeurs dans F. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on note $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$. Ainsi $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 1.9

Soit E, F deux espaces vectoriels normés avec F de Banach. Alors l'espace vectoriel normé $\mathscr{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Remarque : On en déduit que le dual topologique $E' = \mathscr{L}_c(E,\mathbb{K})$ est de Banach.

Théorème 1.10

Soit E un espace vectoriel normé. Alors E est de Banach si, et seulement si, toute série absolument convergente est convergente.

Proposition 1.11

Soit E un espace de Banach et $u \in \mathscr{L}_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$. Alors $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

1.4 Espace d'Hilbert

Soit H un espace préhilbertien c'est-à-dire un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$, la norme induite fait de H un espace vectoriel normé.

Définition 1.12

Un espace d'Hilbert est un espace préhilbertien complet (de Banach).

$\mathbb{R}^n$ est un espace d'Hilbert (muni d'un produit scalaire quelconque).
Un espace (euclidien) préhilbertien de dimension finie est un espace d'Hilbert.

Théorème 1.13 (de projection sur un convexe fermé)

Soit H un espace d'Hilbert et C un convexe fermé de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x,C) = \inf_{c\in C} \|x-c\| = \|x-y\|$. Le point y s'appelle le projeté orthogonal de x sur C et il se note $p_C(x)$.

Théorème 1.14 (de représentation de Riesz)

Soit H un espace d'Hilbert et $f \in H'$. Alors il existe un unique $a \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $f(x) = \langle x, a\rangle$.

On appelle opérateur sur H toute application linéaire continue $T : H \to H$.

Théorème 1.15 (Adjoint)

Soit T un opérateur sur un espace d'Hilbert H. Alors il existe un opérateur noté T^* appelé adjoint de T tel que pour tous $x, y \in H$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. De plus $\|T\| = \|T^*\|$.

2 Théorèmes fondamentaux sur les espaces complets

Théorème 2.1 (de prolongement)

Soit A une partie dense d'un espace métrique (X,d), (Y,d') un espace métrique complet et $f : A \to Y$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $g : X \to Y$ qui prolonge f. De plus g est uniformément continue.

Théorème 2.2 (du point fixe)

Soit X un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application k-contractante où $k \in [0,1[$. Alors f admet un unique point fixe.

Théorème 2.3 (de Baire)

Soit X un espace métrique complet. Si $(F_n)_n$ est une suite de fermés de X tel que $\overset{\circ}{\widehat{\cup_n F_n}} \neq \emptyset$ alors il existe n tel que $\overset{\circ}{F_n} \neq \emptyset$.

Théorème 2.4 (de Baire)

Soit X un espace métrique complet. Si $(O_n)_n$ est une suite d'ouverts dense dans X alors $\cap_n O_n$ est dense dans X.

Application: Un espace vectoriel normé ayant une base algébrique dénombrable n'est pas complet.

Théorème 2.5 (de Banach Steinhaus)

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé et $T_i : E \to F$, $i \in I$ une famille d'applications linéaires continues tel que pour tout $x \in E$, $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty$. Alors $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$.

Théorème 2.6 (de l'application ouverte)

Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue et surjective. Alors f est ouverte.

Théorème 2.7 (d'isomorphisme de Banach)

Soit E, F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire continue et bijective. Alors T^{-1} est continue. Autrement dit T est un isomorphisme.

Théorème 2.8 (du graphe fermé)

Soit E, F deux espace de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire. Si le graphe $G_f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$ alors f est continue.

3 Exercices

Exercice 1

Soit E un espace de Banach et $u : E \to E$ un endomorphisme continue. Montrer que u est nilpotent si, et seulement si, pour tout $x \in E$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n(x) = 0$.

Exercice 2

On muni $\mathbb{R}[X]$ d'une norme quelconque. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet.

Exercice 3

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite d'applications linéaires continue $E \to F$ qui converge simplement vers f alors f est continue.

Exercice 4

Soit E, F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire continue.

1. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \geq c\|x\|$.
   - 1.1 Montrer que f est injective.
   - 1.2 Montrer que $\operatorname{Im} f$ est fermé.
2. On suppose que f est injective et que $\operatorname{Im} f$ est fermé.
   - 2.1 Montrer que $g : E \to \operatorname{Im} f$, $x \mapsto g(x) = f(x)$ est un isomorphisme.
   - 2.2 En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \geq c\|x\|$.

Exercice 5

Soit X un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application dont une itérée f^m soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 6

On note $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites de carrée sommables. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle telle que pour tout $(y_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| < +\infty$. Montrer que $(x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Problème

Le problème proposé a pour but la démonstration d'un théorème relatif aux contractions d'un espace de Banach et l'étude, grâce à ce théorème, d'une équation intégrale.

Première partie :

Si X est un ensemble et (Y,d) un espace métrique, on note $B(X,Y)$ l'ensemble des applications bornées de X dans Y. Ainsi $B(X,Y)$ est un espace métrique;

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

Si de plus X est un espace métrique $C(X,Y)$ (respectivement $C_b(X,Y)$) désigne l'ensemble des applications continue (respectivement continues bornées) de X dans Y. On suppose de plus que Y est un espace métrique complet.

1. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $B(X,Y)$.

   1.1 Montrer que pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, en déduire qu'elle est convergente.
   Pour $x \in X$, on pose $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ (c'est-à-dire f est la limite simple de la suite $(f_n)_n$).

   1.2 Montrer que $f \in B(X,Y)$.

   1.3 Montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $B(X,Y)$.

   1.4 En déduire que $B(X,Y)$ est un espace complet.

   On suppose de plus que X est un espace métrique et on note $C_b(X,Y)$ l'ensemble des applications continues et bornées de X dans Y.

2. Montrer que $C_b(X,Y)$ est un fermé de $B(X,Y)$.

3. Que peut-on dire de $C_b(X,Y)$?

Deuxième partie :

Soit E un espace de Banach, F un fermé non vide de E et $T : F \to F$ une application contractante c'est-à-dire il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que pour tout $(x,y) \in F^2$;

$$\|T(x) - T(y)\| \le \alpha\|x-y\|$$

4. Soit $(x,y) \in F^2$ tel que $T(x) = x$ et $T(y) = y$. Montrer que $x = y$.

5. Soit $z \in F$, on définit la suite $(z_n)_n$ par; $z_0 = z$ et $z_{n+1} = T(z_n)$.

   5.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|z_{n+1} - z_n\| \le \alpha^n\|z_1 - z_0\|$.

   5.2 En déduire que si $(n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $\|z_{n+p} - z_n\| \le \left(\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} \alpha^i\right)\|z_1 - z_0\|$

   5.3 En déduire que $(z_n)_n$ est convergente et que sa limite est un élément de F.

   5.4 Montrer que T possède un unique point fixe.

6. On suppose que $F = E$, soit alors $S : E \to E$ définie par $S(x) = x + T(x)$.

   6.1 Montrer que S es tune bijection continue de E sur E. (Pour la surjectivité considérer l'application $V(x) = y - T(x)$).

   6.2 Montrer que que pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$\|S^{-1}(x) - S^{-1}(y)\| \le< (1-\alpha)^{-1}\|x-y\|$$

Troisième partie :

Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une application continue et $g \in C([0,1],\mathbb{R})$. Pour λ réel on note Ψ l'application qui à $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ associe la fonction définie par;

$$\Psi(f)(x) = g(x) - \lambda\int_0^1 K(x,y)f(y)dy \quad \text{pour tout } x \in [0,1]$$

7. Justifier que l'application $|K|$ est bornée est atteint ses bornes.
   On pose $M = \max\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} |K(x,y)|$

8. Démontrer que $\Psi(f) \in C([0,1],\mathbb{R})$.
   On suppose de plus que $|\lambda| < M^{-1}$.

9. Montrer que Ψ est contractante.

10. En déduire qu'il existe une unique application $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle pour tout $x \in [0,1]$;

$$f(x) = g(x) - \lambda\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$