

Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous espaces propres de la matrice A :

1. $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer χ_u , le polynôme caractéristique de u .
2. Déterminer $\text{Sp}(u)$.
3. Déterminer les sous espaces propres de u .
4. Donner une base de E formée de vecteurs propres de u , et écrire la matrice de u dans cette base.
5. Calculer $u(u - \text{Id}_E)(u - 2\text{Id}_E)$.

Exercice 3

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .
2. En déduire $\text{Sp}(A)$.
3. Déterminer les sous espaces propres de A .
4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
5. Calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .
2. Indiquer, sans faire les calculs, une méthode pour calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$ et l'inverse A^{-1} de A .

Exercice 5

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^2 en fonction de J .
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de J .
3. Déterminer $\text{Sp}(J)$.

Exercice 6

Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de u .
2. Déterminer les sous espaces propres de u , et en déduire une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E formée de vecteurs propres de u .
Soit v un endomorphisme de E vérifiant: $uv = vu$.
3. Montrer que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont des vecteurs propres de v .

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Calculer en fonction de a le rang de la matrice A .
2. Montrer que $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$

Exercice 8

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

1. Déterminer $\text{Sp}(A)$.
2. Déterminer les sous espaces propres de A .
3. Montrer que A est semblable à la matrice $D = \text{diag}(1, j, j^2)$.
4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, et $B = aI_3 + bA + cA^2$. Déterminer $\text{Sp}(B)$.

Exercice 9

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 10

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres, puis une base de vecteurs propres.
3. Résoudre le système différentielle :

$$\begin{cases} x' &= x + 2z \\ y' &= y \\ y' &= 2x + z \end{cases}$$

x, y et z désignent trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

On considère la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Démontre que A n'est diagonalisable.
2. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .
2.1 Trouver un vecteur propre v_1 de u associé à la valeur propre 1.

2.2 Donner un vecteur e tel que (v_1, e) soit une base de E .

2.3 Déterminer la matrice de u dans la base (v_1, e) .

2.4 Résoudre le système différentielle suivante:

$$\begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

Exercice 12

Montrer sans faire des calculs, que la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. En écrivant la matrice de f dans une base bien choisie, montrer que le polynôme caractéristique de f est de la forme

$$P(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - a)$$

Où $a = \text{tr}(f)$. Quelles sont les valeurs propres de f ?

2. Montrer que si $\text{tr}(f) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

3. Montrer que si $\text{tr}(f) \neq 0$, alors f est diagonalisable.

Exercice 14

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, et P le polynôme de degré n donné par $P = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0$.

A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est P .

2. Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Soient f un endomorphisme de E et u un vecteur tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ est libre.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f a la même forme que A .

Exercice 15

Soit A une matrice carrée d'ordre n , non proportionnelle à la matrice identité et telle que $P_A = (X - \lambda)^n$ ($\lambda \in \mathbb{K}$). Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 16

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $f(M) = {}^t M$. Montrer que f est diagonalisable. (Ind: calculer f^2 .)

Exercice 17

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E .

1. Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 est aussi diagonalisable.

2. On suppose que f^2 est diagonalisable, et que $\ker f = \ker f^2$, montrer que f est diagonalisable.

Exercice 18

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A =$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et on suppose que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.
2. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, déterminer le vecteur propre e_k de u associé à la valeur propre λ_k et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1.
3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base.
4. Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ puis calculer P^{-1} .
5. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $B^2 + 3B = A$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B .
 - 5.1 Justifier que $v^2 + 3v = u$.
 - 5.2 Vérifier que $uv = vu$ et en déduire que, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, le vecteur $v(e_k)$ est colinéaire à e_k , conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale.
 - 5.3 On pose $V = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Expliciter Δ en fonction de V puis déterminer les valeurs possibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ainsi que celle de la matrice B .
 - 5.4 Combien de solutions l'équation $X^2 + 3X = A$ admet-elle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer l'endomorphisme $P(f)$.
2. En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si, f est diagonalisable.

Exercice 20

Soient u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$vu - uv = \alpha u$$

1. On suppose que e est un vecteur propre de v associé à la valeur propre λ . Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v(u^k(e)) = (\lambda + k\alpha)u^k(e)$. En déduire qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k(e) = 0$.
2. Montrer que si v est diagonalisable, alors u est nilpotent. (Ind: considérer une base formée de vecteurs propres de v).

Exercice 21 (Théorème de Hadamard)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $1 \leq \forall i \leq n$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, alors A est inversible.
2. En déduire que le spectre de A est inclus dans $\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_f(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$. (où $B_f(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$).

Exercice 22

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$