

Cours de mathématiques

PSI

(Algèbre-Probabilités)

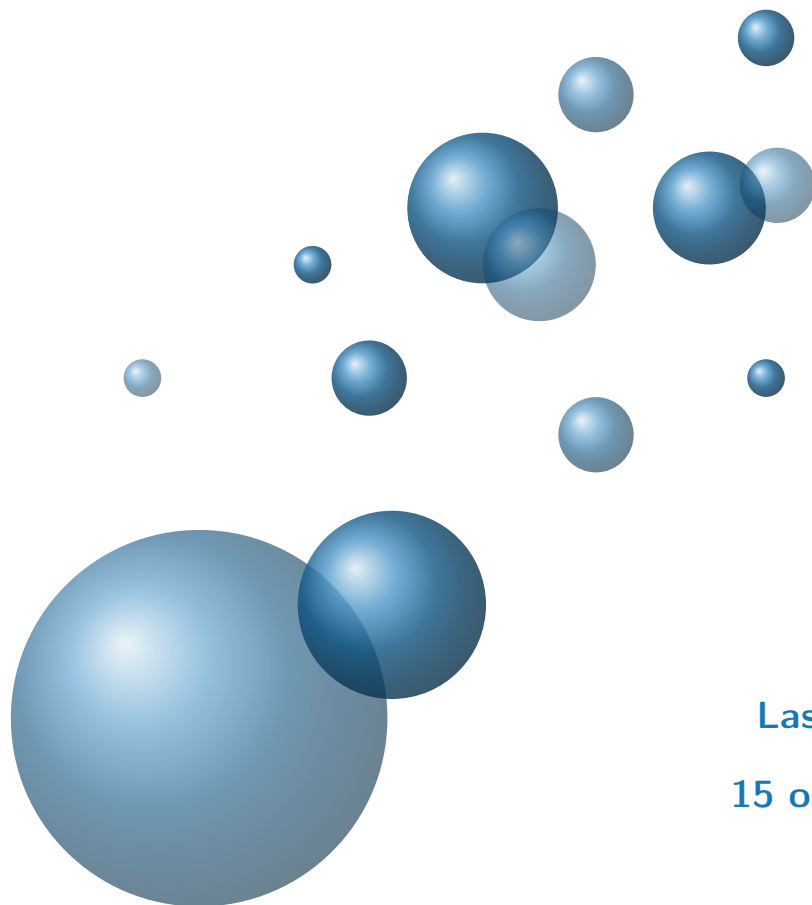
Mohamed AQALMOUN

First Prépa

CPGE

Cours de mathématiques

FIRST-PREPA



Last updated
15 octobre 2026

Table des matières

1	Compléments d'algèbre linéaire	1
1.1	Produit et somme d'espaces vectoriels	1
1.2	Matrices et endomorphismes	6
1.2.1	Matrices définies par blocs	6
1.2.2	Matrice semblables	7
1.2.3	Trace d'une matrice carrée	8
1.2.4	Polynômes d'endomorphismes	9
1.2.5	Sous espaces stables	10
1.3	Interpolation de Lagrange	13
2	Réductions des endomorphismes	15
2.1	Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice	15
2.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice	19
2.3	Théorème de Cayley-Hamilton	22
2.4	Diagonalisation	22
2.5	Trigonalisation	26
3	Probabilités	29
3.1	Ensembles dénombrables	29
3.2	Famille sommables	30
3.2.1	Familles sommables de réels positifs	30
3.2.2	Familles sommables de nombres réels ou complexes	33
3.3	Probabilités	36
3.3.1	Expérience aléatoire	36
3.3.2	Tribu et espace probabilisé	37
3.3.3	Modélisation d'une expérience aléatoire	41
3.3.4	Probabilité conditionnelle	42
3.3.5	Indépendance en probabilité	45

4	Variables aléatoires	47
4.1	Variables aléatoires réelles	47
4.2	Fonction de répartition	49
4.3	Variables aléatoires discrètes	50
4.4	Indépendance	52
4.5	Espérance d'une variables aléatoires	53
4.6	Variance, écarte type et covariance	55
4.7	Vecteurs aléatoires	57
4.8	Fonction génératrice	59
4.9	Fonction génératrice d'une somme	60
4.10	Espérance et variance	61
5	Espaces préhilbertiens (PCSI)	63
5.1	Produit scalaire sur un espace vectoriel	63
5.1.1	Définition et exemples	63
5.1.2	Norme associée à un produit scalaire	65
5.2	Orthogonalité	66
5.2.1	Vecteurs et sous espaces orthogonaux	66
5.2.2	Procédé d'orthonormalisation de Schmidt	68
5.2.3	Projecteur orthogonaux	70
5.3	Suite orthonormale	71
6	Endomorphismes dans les espaces euclidiens	73
6.1	Formes linéaires sur un espace euclidien	73
6.2	Matrices orthogonales	73
6.3	Isométrie vectorielle	76
6.3.1	Groupe orthogonal en dimension 2 et 3	79
6.4	Endomorphismes autoadjoints	81
7	Variable aléatoire à densité	85
7.1	Loi à densité	85
7.2	Espérance et moments	87
7.3	Lois usuelles	89
7.3.1	Loi uniforme	89
7.3.2	Loi exponentielle	90
7.3.3	Loi normale	91
7.3.4	Loi gamma	92
7.4	Couple de variables aléatoires	93
7.4.1	Loi de la somme	93
7.4.2	Covariance et corrélation	93

TABLE DES MATIÈRES

7.5	Théorèmes limites	94
-----	-----------------------------	----

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Produit et somme d'espaces vectoriels

On considère des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$. On définit sur le produit cartésien

$$E_1 \times \dots \times E_p = \{(x_1, \dots, x_p) / x_1 \in E_1, \dots, x_p \in E_p\}$$

les lois suivantes : $\forall (x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \forall \lambda \in \mathbb{K} ;$

$$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$$

Muni de ces deux lois, $E_1 \times \dots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, appelé espace vectoriel produit.

Remarque : (neutre et opposé)

Proposition 1.1.

Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels de dimension finie. Alors l'espace vectoriel produit $E_1 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie et on a :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim E_i.$$

1.1 Produit et somme d'espaces vectoriels

Démonstration : Par récurrence sur p :

Théorème et définition 1.2.

Soit E un espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E . L'ensemble

$$\{x_1 + \dots + x_p / (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}$$

est un sous espace vectoriel de E appelé somme des sous espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ et se note $E_1 + \dots + E_p$ ou $\sum_{i=1}^p E_i$.

Démonstration :

Exemple :

Définition 1.3.

Soit E un espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E . On dit que la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe et on la note $\bigoplus_{i=1}^p E_i$ si, pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$E_j \cap \left(\sum_{i=1, i \neq j}^p E_i \right) = \{0\}$$

Exemple :

Remarque : Un cas particulier : Deux sous espaces vectoriels F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

Remarque : Si la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe, alors pour tout $i \neq j$, la somme $E_i + E_j$ est directe. La réciproque n'est pas vraie. Contre exemple :

CHAPITRE 1 : Compléments d'algèbre linéaire

Théorème 1.4.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E . La somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe si, et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, $x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$.

Démonstration :

Exemple : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de E . Pour $1 \leq i \leq p$, on pose $E_i = \text{Vect}(v_i)$

Remarque : Soit $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow E$ l'application définie par :

$$f(x_1, \dots, x_p) = x_1 + \dots + x_p$$

La somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe si, et seulement si, l'application f est injective.

Une application linéaire f est injective si, et seulement si, $\ker f = \{0\}$

Proposition 1.5.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E . La somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe si, et seulement si, $\forall x \in E_1 + \dots + E_p$, $\exists!(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \dots + x_p$.

Démonstration :

Théorème 1.6.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E de dimensions finies. Alors $\sum_{i=1}^p E_i$ est de dimension finie et on a $\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim E_i$. De plus $\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim E_i$ si, et seulement si, la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe.

Un espace vectoriel est de dimension s'il admet une famille génératrice finie

Démonstration :

1.1 Produit et somme d'espaces vectoriels

Définition 1.7.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E . On dit que les sous espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ sont supplémentaires dans E si :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$$

Remarque :

Exemple :

Proposition 1.8.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E_1, \dots, E_p$ sont supplémentaires dans E ,
2. La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe et $\dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_i$.
3. $E = \sum_{i=1}^p E_i$ et $\dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_i$.

Démonstration :

Théorème 1.9.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels supplémentaires dans E . Si pour chaque $1 \leq i \leq p$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i , alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E dite base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Démonstration :

CHAPITRE 1 : Compléments d'algèbre linéaire

Définition 1.10.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et F un sous espace vectoriel de E . Une base $\mathcal{B}$ de E est dite adaptée à F , s'il est de la forme $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ où $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F .

Exemple :

Théorème 1.11.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels supplémentaires dans E (i.e $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$). Si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout $1 \leq i \leq p$, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i .

Démonstration :

Définition 1.12.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $E_1, \dots, E_r$ des sous espaces vectoriels supplémentaires dans E ($E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$). Pour $1 \leq i \leq r$ soit p_i l'application définie par $p(x = \sum_{k=1}^r x_k) = x_i$, où $\sum_{k=1}^r x_k$ est la décomposition de x selon la somme $\bigoplus_{i=1}^r E_i$. La famille $(p_1, \dots, p_r)$ s'appelle la famille des projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$.

Exemple :

Proposition 1.13.

Avec les notations précédentes, on a :

1. p_i est un projecteur de E .

Un projecteur est un endomorphisme p vérifiant $p^2 = p$

2. $\text{Im } p_i = E_i$ et $\ker p_i = \sum_{j=1, j \neq i}^r E_j$.
3. $\sum_{i=1}^r p_i = \text{Id}_E$.

Démonstration :

1.2 Matrices et endomorphismes

1.2.1 Matrices définies par blocs

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $n = p + q$.

Étant données quatre matrices $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On identifie la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dite *matrice définie par blocs*.

A et D sont les blocs diagonaux (matrices carrées par hypothèse, mais pas nécessairement de même taille).

Si C (respectivement B) est nulle, la matrice M est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) par blocs.

Si les deux matrices C et B sont nulles, la matrice M est dite diagonale par blocs.

La multiplication par un scalaire d'une matrice définie par blocs est naturelle.

Proposition 2.14.

1. $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$

Exemple :

CHAPITRE 1 : Compléments d'algèbre linéaire

Corollaire 2.15.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) par blocs est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) par blocs. En particulier, le produit de deux matrices diagonales par blocs est une matrice diagonale par blocs.

Proposition 2.16.

$$\det \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ A & B \end{pmatrix} = \det B \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det A$$

Démonstration : Par récurrence sur $p \geq 1$.

Théorème 2.17.

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D \end{pmatrix} = \det A \det D$$

Démonstration : On a

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} =$$

1.2.2 Matrice semblables

Définition 2.18.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

Remarque : La relation "être semblable à" est une relation d'équivalence. On parle alors de deux matrices semblables.

Théorème 2.19.

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases.

1.2.3 Trace d'une matrice carrée

Définition 2.20.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A , i.e

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposition 2.21.

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B)$. En d'autres termes l'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$.

Démonstration :

Corollaire 2.22.

Si A et B sont semblables, alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

Démonstration :

Définition 2.23.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On appelle la trace de u et on note $\text{tr}(u)$ la trace de la matrice de u dans une base quelconque.

Théorème 2.24.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E . Alors $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Démonstration :

1.2.4 Polynômes d'endomorphismes

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On note

$$\begin{cases} u^0 &= \text{Id}_E \\ u^n &= \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi pour $n \geq 1$, $u^n = u^{n-1} \circ u = u \circ u^{n-1}$.

Définition 2.25.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. L'endomorphisme $P(u)$ est défini par ;

$$P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k = a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \dots + a_n u^n$$

Remarque : Si $P = c$ est un polynôme constant, alors

Proposition 2.26.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(P) = P(u)$ linéaire, et vérifie $\varphi(PQ) = P(u) \circ Q(u)$ et $\varphi(1) = \text{Id}_E$.

Démonstration : Il est clair que φ est linéaire et $\varphi(1) = \varphi(X^0) = u^0 = \text{Id}_E$.

Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Si Q est de la forme $Q = X^l$

Revenant au cas général, où $Q = \sum_{l=0}^m b_l X^l$ est un polynôme quelconque. On a

Version matricielle : Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On note par $P(M)$ la matrice

$$P(M) := \sum_{k=0}^n a_k M^k$$

L'application $\Psi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par $\Psi(P) = P(M)$ est linéaire, $\Psi(PQ) = \Psi(P)\Psi(Q)$ et $\Psi(1) = \text{Id}_E$.

Définition 2.27.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est un polynôme annulateur de M si $P(M) = 0$.

Exemples : Si u est un projecteur de E , alors
Si s est une symétrie

Proposition 2.28.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, notons $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(M)$$

Ainsi, un polynôme P est annulateur de u si, et seulement si, P est annulateur de M .

Démonstration :

1.2.5 Sous espaces stables

Définition 2.29.

Soit E un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E .

1. On dit que F est stable par u si $u(F) \subseteq F$.

CHAPITRE 1 : Compléments d'algèbre linéaire

2. Si c'est le cas on appelle endomorphisme induit par u sur F , l'endomorphisme de F noté u_F qui à tout x associe $u(x)$.

Exemple : (Droite vectorielle stable par u) : Soit E un espace vectoriel, x un vecteur non nul de E , et $D = \text{Vect}(x)$ la droite vectorielle engendrée par x . Si D est stable par u , ...
.....
Réciproquement, s'il existe

Proposition 2.30.

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ un sous espace vectoriel de E . Alors F est stable par u si, et seulement si, $1 \leq \forall i \leq p, u(e_i) \in F$.

Démonstration :

Proposition 2.31.

Soient $E_1, \dots, E_r$ des sous-espaces vectoriels de E et u un endomorphisme de E .

Si $E_1, \dots, E_r$ sont stables par u , alors :

1. Le sous espace vectoriel $\bigcap_{i=1}^r E_i$ est stable par u .
2. Le sous espace vectoriel $\sum_{i=1}^r E_i$ est stable par u . En particulier, si les sous espaces vectoriels sont en somme directe, le sous espace vectoriel $\bigoplus_{i=1}^r E_i$ est stable par u .

Démonstration :

Théorème 2.32.

Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, alors $\text{Im } v$ et $\text{ker } v$ sont stables par u .

Démonstration :

Proposition 2.33.

Soient E un espace vectoriel de dimension n , F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et u un endomorphisme de E . F est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans toute base adaptée à F est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Démonstration :

Remarque : La matrice A représente la matrice de l'endomorphisme u_F dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Proposition 2.34.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $E_1, \dots, E_r$ des sous espaces vectoriels supplémentaires dans E i.e $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$. Les sous espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ sont stables par u si, et seulement si, la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition est diagonal par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix}$$

où A_i est la matrice de u_{E_i} .

1.3 Interpolation de Lagrange

Soit n un entier naturel et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ($n+1$) nombres deux à deux distincts.
Pour $0 \leq i \leq n$, on pose

$$L_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j} = \frac{X - a_0}{a_i - a_0} \dots \frac{X - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \frac{X - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \dots \frac{X - a_n}{a_i - a_n}$$

Les polynômes L_i s'appellent les polynômes de *Lagrange* associés à $(a_0, \dots, a_n)$.

Proposition 3.35.

Avec les notations précédentes :

1. $\deg L_i = n$, en particulier $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$.
2. Pour $0 \leq i, j \leq n$, on a $L_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$

Démonstration :

Proposition 3.36.

1. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$.
3. $\sum_{i=0}^n L_i = 1$.

Démonstration :

Théorème 3.37.

Soient $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ ($\deg P \leq n$) tel que pour tout $0 \leq i \leq n$, $P(a_i) = y_i$.

Démonstration :

Remarque : L'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $P(a_i) = y_i$, pour tout $0 \leq i \leq n$, est donné par

1.3 Interpolation de Lagrange

Déterminant de Vandermonde : Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $x_0, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On appelle déterminant de Vandermonde le nombre défini par :

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Proposition 3.38.

$$V(x_0, \dots, x_n) = V(x_0, \dots, x_{n-1}) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x_n - x_k) \right).$$

Démonstration : On considère le polynôme $P = V(x_0, \dots, x_{n-1}, X) \dots \dots \dots$

Théorème 3.39.

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Remarque : $V(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ si, et seulement si, les nombres $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Chapitre 2

Réductions des endomorphismes

2.1 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition 1.1.

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On dit que λ est une valeur propre de u , s'il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$.
2. Si λ est une valeur propre de u , tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .
3. L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le spectre de u et se note $\text{sp}(u)$ ou $\text{spec}(u)$.

Exemples :

Proposition 1.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. λ est une valeur propre de u ,
2. $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.

2.1 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

3. $\ker(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$.

Si de plus E est de dimension finie ces propriétés sont équivalentes à

4. $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$.

Démonstration :

Proposition 1.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \text{sp}(u)$, $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$, en particulier $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Démonstration : Montrons d'abord par récurrence sur k , que $u^k(x) = \lambda^k x$.

Corollaire 1.4.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u , alors toute valeur propre de u est une racine de P . Autrement dit $\text{Sp}(u) \subseteq \{\text{les racines de } P\}$.

Démonstration :

Corollaire 1.5.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors $\text{sp}(u) = \{0\}$.

Démonstration :

Définition 1.6. (Sous espace propre)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . Le sous espace propre associé à la valeur propre λ est le sous espace vectoriel noté $E_\lambda(u)$,

CHAPITRE 2 : Réductions des endomorphismes

défini par

$$E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Remarques : Soit λ est une valeur propre de u .

1. Le sous espace propre $E_\lambda(u)$ est formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.
2. $\dim(E_\lambda(u)) \geq 1$.
3. Le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre (c'est par définition).

Exemples :

Théorème 1.7. (s.e.p sont en somme directe)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u ($r \geq 2$). Alors les sous espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_r}(u)$ sont en somme directe c'est-à-dire $\sum_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$.

Démonstration :

Corollaire 1.8.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $e_1, \dots, e_r$ sont des vecteurs propres associés à valeurs propres deux à deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ alors $(e_1, \dots, e_r)$ est libre.

Démonstration :

Exemple : Pour $0 \leq k \leq n$, on considère la fonction f_k définie par $f_k(x) = e^{kx}$ ($f_k \in E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

2.1 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

Corollaire 1.9.

Si E est un espace vectoriel de dimension n . Alors tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ admet au plus n valeurs propres.

Démonstration :

Éléments propres d'une matrice carrée :

Définition 1.10.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On dit que λ est une valeur propre de M , s'il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$.
2. Si λ est une valeur propre de M , tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .
3. L'ensemble des valeurs propres de M est appelé le spectre de M et se note $\text{sp}(M)$ ou $\text{spec}(M)$.
4. Soit λ une valeur propre de M , le sous espace propre associé à la valeur propre λ , noté $E_\lambda(M)$ est le sous espace vectoriel $E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / MX = \lambda X\}$.

Exemple :

Proposition 1.11.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

1. $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(M)$.
2. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u) (= \text{Sp}(M))$, $x \in E$ et $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$. Alors x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si, et seulement si, X est un vecteur propre de M associé à la même valeur propre λ .

CHAPITRE 2 : Réductions des endomorphismes

Démonstration :

Proposition 1.12.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. λ est une valeur propre de M ,
2. $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible,
3. $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

2.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition 2.13.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de M est le polynôme noté χ_M à coefficients dans $\mathbb{K}$ défini par : $\chi_M(X) := \det(XI_n - M)$.

Exemples :

1. Le polynôme caractéristique de l'identité :
.....
2. Soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors
Cette dernière formule est valable pour toute matrice d'ordre deux.

Définition 2.14.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u noté χ_u est le polynôme caractéristique des d'une de ses matrices dans une base de E (ce polynôme ne dépend pas du choix de cette base). Ainsi, si M est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E , on a par définition $\chi_u = \chi_M$.

Remarque : (Pour la justification de la définition précédente)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de

2.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice

E . Notons M (respectivement M') la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$). Par la formule de changement de bases, ...

Proposition 2.15.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. χ_M est un polynôme unitaire de degré n .
2. Le coefficient de X^{n-1} dans χ_M est $-\text{tr}(M)$.
3. Le terme constant est $(-1)^n \det(M)$

Remarque : On peut résumer la proposition précédente dans la formule suivante : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\chi_M(X) = X^n - \text{tr}(M)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M)$$

Théorème 2.16.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les valeurs propres de M sont les racines de χ_M dans $\mathbb{K}$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$.

Démonstration :

Remarque : (Cas d'une matrice triangulaire) Soit M une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$. Alors $XI_n - M$ est aussi une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux

Proposition 2.17.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M possède au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n . Alors u possède au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.

Démonstration :

CHAPITRE 2 : Réductions des endomorphismes

Définition 2.18.

On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre λ (d'un endomorphisme ou matrice), et on note m_λ , son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Remarque :

Exemple :

Théorème 2.19.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u et m_λ son ordre de multiplicité. Alors

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$$

Démonstration :

Proposition 2.20.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs. Alors $\chi_M = \chi_A \chi_C$

Démonstration :

Proposition 2.21.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace stable par u . Alors χ_{u_F} divise χ_u .

Démonstration :

2.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 3.22. (théorème de Cayley-Hamilton)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_u(u) = 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_M(M) = 0$

En d'autre terme, le polynôme caractéristique de u (respectivement de M) annule u (respectivement M).

Démonstration : Admis.

Exemple : Cas de $n = 2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a $\chi_A = X^2 - \text{tr} A X + \det A$. Donc $A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)I_2 = 0$.

2.4 Diagonalisation

Définition 4.23.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable, s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est diagonalisable, s'elle est semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $M = PDP^{-1}$.

Remarque :

Exemple :

Exemple : (matrice non diagonalisable) :

Remarque : Si u (respectivement M) est diagonalisable alors χ_u (respectivement χ_M) est

CHAPITRE 2 : Réductions des endomorphismes

Proposition 4.24.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, M est diagonalisable.

Démonstration :

Théorème 4.25.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

Démonstration :

Théorème 4.26.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$ et pour toute valeur propre λ de u , $\dim(E_{\lambda}(u)) = m_{\lambda}$.

Démonstration :

Proposition 4.27.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u . Alors u est diagonalisable si, et seulement si, $\sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$.

Démonstration :

Proposition 4.28.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u admet n racines distinctes, alors u est diagonalisable.

Démonstration :

Proposition 4.29. (Décomposition spectrale)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Notons $(p_1, \dots, p_r)$ la famille de projecteurs associés à la décomposition $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(u)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$P(u) = P(\lambda_1)p_1 + \dots + P(\lambda_r)p_r$$

Démonstration :

Théorème 4.30.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.

Exemples :

1. Projecteur :
2. Symétrie :

Corollaire 4.31.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u . Alors u est diagonalisable si, et seulement si, $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ est annulateur de u .

Démonstration :

Exemple : $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, ...

CHAPITRE 2 : Réductions des endomorphismes

Proposition 4.32.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est diagonalisable et F est un sous espace vectoriel stable par u , alors u_F est diagonalisable.

Démonstration :

Applications de la diagonalisation :

Calcul des puissance d'une matrice diagonalisable : Si A est une matrice diagonalisable (on dispose d'un algorithme pour calculer A^k) alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. Puis $A^k = PD^kP^{-1}$ où D^k est simple à calculer.
on peut également trouver A^{-1} lorsque A est inversible à savoir $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
Suites récurrentes linéaire : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_n$ une suite vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_0 u_n + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$. On a

La relation $(\star)$ est équivalente à la relation

Le terme général de la suite X_n est donné par $X_n = A^n X_0$. Le problème se ramène alors au calcul des puissance de A .

Remarque : Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0$.

Exemple : Déterminer toutes les suites vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

2.5 Trigonalisation

Définition 5.33.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable, s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est trigonalisable, s'il est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire T telles que $M = PTP^{-1}$.

Remarque :

Proposition 5.34.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Alors u est trigonalisable si, et seulement si, M est trigonalisable.

Démonstration :

Théorème 5.35.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$.

Démonstration : Admis.

Corollaire 5.36.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors M est trigonalisable.

Remarque :

Corollaire 5.37.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors

1. $\text{tr}(M) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda \lambda.$
2. $\det(M) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda}.$

Chapitre 3

Probabilités

3.1 Ensembles dénombrables

Définition 1.1.

Un ensemble est dénombrable, s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Un ensemble est au plus dénombrable, s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exemples :

1. $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
3. $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Théorème 1.2.

Un ensemble est au plus dénombrable, s'il est fini ou dénombrable.

Remarque :**Proposition 1.3.**

Si E et F sont des ensembles dénombrables alors $E \times F$ est dénombrables.

Exemple : Si $p \geq 2$, alors $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Théorème 1.4.

1. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
2. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Remarque :

Exemple : L'ensemble $\mathbb{Q}$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = \{\frac{m}{n} / m \in \mathbb{Z}\}$

Théorème 1.5.

Soit I un ensemble au plus dénombrable. Si $(F_j)_{j \in J}$ est une partition de I , alors J est au plus dénombrable.

3.2 Famille sommables

Les familles considérés ici sont toutes indexées par un ensemble au plus dénombrable.

3.2.1 Familles sommables de réels positifs

3.2.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.6.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable s'il existe une constante positive M telle que, pour toute partie finie J de I , on ait $\sum_{i \in J} u_i \leq M$.

On définit alors la somme notée $\sum_{i \in I} u_i$ de la famille sommable $(u_i)_{i \in I}$ comme étant la borne supérieure de ces sommes finies :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \text{ finie} \\ J \subset I}} \sum_{i \in J} u_i$$

Dans le cas où une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs n'est pas sommable, on convient de poser $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$

Exemples :

1. Soit $\alpha \in [0, 1]$. On considère la famille $(\alpha^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$. Dans cet exemple $I = \mathbb{N}^{*2}$. Alors la famille $(\alpha^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable. En effet ; soit J une partie finie de $\mathbb{N}^{*2}$
2. On considère la famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ où $a_{p,q} = \frac{1}{p!q!}$. Dans cet exemple $I = \mathbb{N}^2$. Alors la famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. En effet, soit J une partie finie de $\mathbb{N}^2$, ...

Propriétés 2.7.

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux famille de réels positifs vérifiant ; $\forall i \in I, v_i \leq u_i$. Alors

1. Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable.
2. Si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est non sommable alors $(u_i)_{i \in I}$ est non sommable.

Démonstration : Immédiate.

Exemple : Si $\alpha \in [0, 1]$, alors la famille $(\frac{\alpha^{pq}}{p+q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable. En effet, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a $\frac{\alpha^{pq}}{p+q} \leq \alpha^{pq}$, ...

Proposition 2.8.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, et J une partie de I (finie ou infinie).

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i \in J}$ l'est aussi et

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

Démonstration : Si K est une partie fine de J , donc aussi de I , d'où $\sum_{i \in K} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$. Ainsi la famille $(u_i)_{i \in J}$ est sommable et on a $\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$.

Théorème 2.9.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Alors la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_n u_n$ converge, et dans ce cas on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Démonstration :

3.2.1.2 Sommation par paquets

Théorème 2.10. (Sommation par paquets)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de l'ensemble de I . Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Remarque :

Exemple : La famille $\left(\frac{1}{(p+q)^3} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable :

Pour $n \geq 2$, posons $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} / p + q = n\}$ c'est une partie finie de $\mathbb{N}^{*2}$ de cardinal $n - 1$. La famille $(I_n)_{n \geq 2}$ forme une partition de $\mathbb{N}^{*2}$, ...

Théorème 2.11. (Fubini)

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de nombres réels positifs. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j}$$

Remarque : Si $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs. Alors ...

3.2.2 Familles sommables de nombres réels ou complexes

3.2.2.1 Définition et exemple

Définition 2.12.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de complexes. On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable

Exemple : Soit z un complexe de module $|z| < 1$. La famille $(z^{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Remarque : Si $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sont des famille sommables et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors la famille $(u_i + \alpha v_i)_{i \in I}$ est

Proposition 2.13.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et $(v_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres réels positifs, tel que pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Démonstration :

3.2.2.2 Somme d'une famille sommable

Pour définir la somme d'une famille sommable de complexes, il nous faut quelques résultats préliminaires. Commençons par le cas réels.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$. On a donc $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Caractérisation de la sommabilité dans le cas réel :

Théorème 2.14.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels. Alors
La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux familles $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables.
Dans ce cas on a $\sum_{i \in I} |u_i| = \sum_{i \in I} u_i^+ + \sum_{i \in I} u_i^-$.

Définition de la somme d'une famille sommable dans le cas réel :

Définition 2.15.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres réels. Sa somme est notée $\sum_{i \in I} u_i$ est définie par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

Caractérisation de la sommabilité dans le cas complexe :

Théorème 2.16.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de complexes.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux famille de réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ sont sommables.

Démonstration :

Définition de la somme d'une famille sommable dans le cas complexe :

Définition 2.17.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de complexes.

On appelle somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ et on note $\sum_{i \in I} u_i$ le complexe défini par :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

Cas d'une famille indexée par $\mathbb{N}$ (lien entre série et famille) :

Théorème 2.18.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

La famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente.

Dans ce cas on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Démonstration :

Propriétés 2.19.

Soient $(u_i)_{i \in I}$, $(v_i)_{i \in I}$ deux familles sommables de nombres complexes et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors la famille $(\alpha u_i + \beta v_i)_{i \in I}$ est sommable et on a

$$\sum_{i \in I} (\alpha u_i + \beta v_i) = \alpha \sum_{i \in I} u_i + \beta \sum_{i \in I} v_i$$

Démonstration :
L'ensemble des familles sommables (indexées par I) est un espace vectoriel et il se note $\ell^1(I)$.

Proposition 2.20.

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et J une partie de I , alors la famille $(u_i)_{i \in J}$ est sommable.

Démonstration :

Théorème 2.21. (sommation par paquets)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I . Alors

1. Pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i \in I_j}$ est sommable.

2. La famille $\left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J}$ est sommable.

et on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Démonstration : Admis.

Cas particulier : Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille sommable.

Cas d'une suite double est une famille de la forme :

Théorème 2.22. (Fubini)

Soit $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une famille (de nombres complexes) sommable. Alors

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$$

Exemple :

1. Étudier la sommabilité de la série double $\left(\frac{1}{p^q} \right)_{p,q \geq 2}$.
2. En déduire que $\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1) = 1$

Théorème 2.23.

Si $(v_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes indexée par un ensemble (dénumérable I) et $\sigma : I \rightarrow I$ une bijection, alors la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(v_{\sigma(j)})_{j \in I}$ est sommable, auquel cas

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{j \in J} v_{\sigma(j)}$$

3.3 Probabilités

3.3.1 Expérience aléatoire

Certaines expériences entraînent des résultats aléatoires, c'est-à-dire qui dépendent directement du hasard.

Définition 3.24.

On appelle *expérience aléatoire* une expérience dont le résultat n'est pas déterminée par les conditions initiales, i.e dépend du **hasard**¹.

1. Le mot Hasard est un mot d'origine arabe : az-zahr, le dé. Il est apparu en français pour signifier tout d'abord un jeu de dés, puis plus généralement un événement non prévisible, et par extension le mode d'apparition de ce type d'événement.

CHAPITRE 3 : Probabilités

Exemples :

1. Choisir au hasard un entier naturel $n \leq 20$.
2. Lancer un dé est noté le chiffre qui apparaît.
3. Lancer 10 fois une pièce de monnaie et compter le nombre de fois où "face" est apparu.
4. Choisir au hasard un entier naturel

Définition 3.25.

On appelle ensemble fondamental ou univers d'une expérience aléatoire l'ensemble Ω dont les éléments sont les résultats possibles, ou plus précisément une modélisation des résultats possibles.

Exemples : Dans les exemples précédents :

1. $\Omega = \dots\dots\dots$
2. $\Omega = \dots\dots\dots$
3. $\Omega = \dots\dots\dots$
4. $\Omega = \dots\dots\dots$

3.3.2 Tribu et espace probabilisé

Définition 3.26.

Soit Ω un ensemble, et $\mathcal{T}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu ou une σ -algèbre si :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$,
2. Si $A \in \mathcal{T}$, alors $A^c \in \mathcal{T}$,
3. Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}$.

On dit que l'espace $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable ou mesurable.

Un élément de $\mathcal{T}$, est appelé événement.

Exemples :

1. Tribu pleine : Si Ω est un ensemble, il est clair que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.

2. Tribu trivial : Si Ω est un ensemble, et si on pose $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable.
3. Tribu engendrée par une partie : Si A est une partie d'un ensemble Ω , et $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$, alors $(\Omega, \mathcal{T})$ est espace probabilisable.

Propriétés 3.27.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

1. $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{T}$,
2. Pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{T}$ on a $\bigcap_n A_n \in \mathcal{T}$,
3. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i, \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{T}$. En particulier si $A, B \in \mathcal{T}$ alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des éléments de $\mathcal{T}$.

Démonstration :

Définition 3.28.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

1. Deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$, sont dits incompatibles.
2. Un événement est dit élémentaire, si c'est un singleton.
3. On appelle événement contraire d'un événement A l'événement A^c le complémentaire de A dans l'univers.
4. Si A et B sont deux événements, on appelle événement A ou B l'événement $A \cup B$, et on appelle l'événement A et B l'événement $A \cap B$.
5. On appelle système complet d'événements toute suite (finie ou infinie) d'événements non vides, deux à deux incompatibles et dont la réunion est égale à l'univers.

Terminologie : L'événement $\emptyset$ est appelé l'événement **impossible**, et l'événement Ω est appelé l'événement **certain**.

Remarques :

1. Un événement et son contraire sont incompatibles.

CHAPITRE 3 : Probabilités

2. Si A est un événement qui n'est pas impossible et qui n'est pas certain, alors $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet.

Définition 3.29.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

On appelle mesure de probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$, toute application $p : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$ ayant les deux propriétés suivantes :

1. $p(\Omega) = 1$, et
2. Pour toute suite $(A_n)_n$ d'événements deux à deux incompatibles ; $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$, la série $\sum_{n \geq 0} p(A_n)$ converge et on a

$$p\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ est appelé espace probabilisé ou mesuré.

Exemple : Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{T}$ la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, pour $A \in \mathcal{T}$, $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Propriétés 3.30.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

1. $p(\emptyset) = 0$,
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$,
3. $p(A^c) = 1 - p(A)$, pour tout $A \in \mathcal{T}$,
4. Pour tous $A, B \in \mathcal{T}$, on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$,
5. Pour tous $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $A \subseteq B$, on a $p(A) \leq p(B)$.

Démonstration :

Remarque : Si $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ est un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors $p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p(A_i)$, et si de plus les événements A_i sont deux à deux incompatibles, alors $p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$. L'inégalité précédente

est valable dans le cas où la suite est infinie, en appliquant le théorème suivant :

Théorème 3.31. (des limites monotones)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ un espace probabilisé.

1. Si $(A_n)_n$ est une suite croissante d'événements (i.e $A_n \subseteq A_{n+1}$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) = p(\bigcup_n A_n)$.
2. Si $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'événements (i.e $A_n \supseteq A_{n+1}$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) = p(\bigcap_n A_n)$.

Démonstration :

1. Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'événements. On commence à construire à partir de la suite $(A_n)_n$ une suite $(B_n)_n$ de la façon suivante :

$$B_0 = A_0 \text{ et pour } n \geq 1, \text{ on pose } B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i) = A_n \setminus A_{n-1}$$

La suite $(B_n)_n$ est un système

2. Si $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'événement, alors la suite $(B_n)_n$ est une suite croissante, où pour tout n , $B_n = A_n^c$. D'après le résultat du 1., ...

Remarque : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $p(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$:

Si on pose $D_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$, alors $(D_n)_n$ est une suite croissante d'événements, et d'après le théorème de la limite monotone on a

$$p(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = p(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(D_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n p(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n).$$

Théorème 3.32.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et $(p_k)_{1 \leq k \leq n} \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, alors il existe une unique probabilité p sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $p(\{w_k\}) = p_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Plus généralement, si $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs tels

que $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, alors il existe une unique probabilité p sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que $p(\{\omega_n\}) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Pour un événement A , on pose $p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\})$. Alors p convient.

Exemple : Probabilité uniforme : Soit Ω un ensemble non vide fini de cardinal n . Il existe une unique probabilité p sur $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, $p(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$. La probabilité ainsi définie appelée **probabilité uniforme**. Plus généralement, pour toute partie A de Ω on a

$$p(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Les événements élémentaires ont même probabilité, et on dit alors qu'ils sont **équiprobables**.

Dans le cas de la probabilité uniforme, tout calcul de probabilité se résume donc à un problème de dénombrement.

Si l'énoncé ne précise pas la probabilité, c'est qu'il s'agit sans doute de la probabilité uniforme.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non truqué et observer le résultat. Soit A l'événement « Le résultat est un nombre impair ». Ici

3.3.3 Modélisation d'une expérience aléatoire

Définition 3.33.

Une expérience aléatoire est modélisée par un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, p)$; où :

1. Ω est l'ensemble fondamental de l'expérience,
2. $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω ,
3. p une mesure de probabilité sur $\mathcal{T}$.

Le choix de l'ensemble Ω comporte une part d'arbitraire. Il dépend de l'idée que l'on a, a priori, sur les résultats de l'expérience aléatoire.

Pour un problème donné, il y a souvent plusieurs modélisations possibles, c'est-à-dire que le choix de l'espace de probabilité n'est pas unique.

En pratique : Lorsque Ω est fini ou dénombrable, on considère en général la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$. C'est le cas par exemple si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ensemble des résultats possibles du lancer d'un dé, ou si $\Omega = \mathbb{N}^*$, date d'apparition du premier Pile dans une succession de lancers d'une pièce (lorsqu'on exclut le cas improbable où « Pile » n'apparaît jamais). Si Ω n'est pas dénombrable, comme c'est le cas dans l'exemple d'une suite infinie de lancers ($\Omega = (\{0, 1\})^{\mathbb{N}^*}$), on ne considérera pas la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, mais une tribu plus petite.

Exemples :

1. Lancer une pièce de monnaie non truquée, deux résultats possibles $P = \text{"pile"}$ ou $F = \text{"face"}$: on a $\Omega = \dots\dots\dots$
2. Lancer un dé non truqué et noté le chiffre apparaît : $\Omega = \dots\dots\dots$

3.3.4 Probabilité conditionnelle

Dans ce qui précède, on a parlé de la probabilité d'un événement sans tenir compte de la réalisation d'autres événements. En pratique, on peut considérer plusieurs événements, certains pouvant avoir une influence sur la réalisation d'autres événements. Par exemple : On lance deux dés, et on considère les événements $A = \{\text{la somme est } \geq 11\}$ et $B = \{\text{le lancer du 1er dé donne 6}\}$. Il est clair que la réalisation de B influe sur la réalisation de A .

Supposons que l'on s'intéresse à la réalisation d'un événement A , tout en sachant qu'un événement B est réalisé. Si A et B sont incompatibles, alors la question est réglée : A ne se réalise pas. Mais si $A \cap B \neq \emptyset$, il est possible que A se réalise. Cependant, l'espace des événements possibles n'est plus Ω tout entier, mais il est restreint à B . En fait, seule nous intéresse la réalisation de A à l'intérieur de B , c'est-à-dire $A \cap B$ par rapport à B . Ceci justifie la définition suivante.

Proposition 3.34.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, $A \in \mathcal{T}$ tel que $p(A) > 0$, pour $B \in \mathcal{T}$ posons $p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$, alors l'application $p_A : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$, $B \mapsto p_A(B) = p(B|A)$ est une probabilité sur Ω , i.e $(\Omega, \mathcal{T}, p_A)$ est un espace probabilisé.

Démonstration :

Définition 3.35.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, et A un événement tel que $p(A) > 0$.
 p_A s'appelle la probabilité conditionnelle sur Ω associée à l'événement A .

Proposition 3.36.

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie d'événements, telle que $p(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, on a alors ;

$$p\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = p(A_1)p(A_2|A_1)\dots p(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités composées.

Démonstration : Par récurrence sur n .

Exemple : Une urne contient initialement 9 boules noires et 4 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire, on l'enlève, si on tire une blanche, on la retire, et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite?
On note B_i l'événement "La i -ème boule tirée est blanche". La probabilité recherchée est $p(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$, d'après la formule des probabilités composées, on a

$$p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1)p(B_2|B_1)p(B_3|B_1 \cap B_2)$$

Clairement, $P(B_1) = \dots$ Maintenant, si B_1 est réalisé, avant le 2-ème tirage, l'urne est constituée de boules noires et blanches. On a donc :

$P(B_2|B_1) = \dots\dots$ Si B_1 et B_2 sont réalisés, avant le 3-ème tirage, l'urne est constituée de $\dots\dots$ boules noires et $\dots\dots$ blanche. On en déduit $P(B_3|B_1 \cap B_2) = \dots\dots$ Finalement $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dots\dots$

Proposition 3.37.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé .

1. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. Pour tout événement B nous avons ;

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n p(B|A_i)P(A_i)$$

2. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. Pour tout événement B nous avons ;

$$p(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(B \cap A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(B|A_i)P(A_i)$$

Formule des probabilités totales.

Démonstration :

Exemple : Une urne contient 5 boules jaunes et 7 boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit jaune ?

On note, pour $i = 1$ ou $i = 2$: J_i l'événement « La i -ème boule tirée est jaune », et N_i l'événement « La i -ème boule tirée est noire ». (J_1, N_1) est système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales on a : $p(J_2) =$.

.....

Proposition 3.38.

Soit $(\omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé .

1. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. Pour tout événement B de probabilité

non nulle, nous avons ;

$$p(A_j|B) = \frac{p(A_j)p(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n p(A_i)p(B|A_i)}$$

2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. Pour tout événement B de probabilité non nulle, nous avons ;

$$p(A_j|B) = \frac{p(A_j)p(B|A_j)}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(A_i)p(B|A_i)}$$

Formule de Bayes.

Démonstration :

La formule de Bayes (publiée après sa mort en 1763) présente un grand intérêt car elle permet de modifier notre connaissance des probabilités en fonction d'informations nouvelles. Cette formule joue donc un rôle très important dans la statistique bayésienne.

3.3.5 Indépendance en probabilité

Définition 3.39.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, A et B deux événements. On dit que A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Remarque : Si $p(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $p_B(A) = p(A)$.

Propriétés 3.40.

Si A et B sont deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ alors :

1. Les événements A^c et B sont indépendants,
2. Les événements A^c et B^c sont également indépendants.

Démonstration :
 Nous allons maintenant définir l'indépendance de plus de 2 événements.

Définition 3.41.

1. Soit $A_1, \dots, A_n$, des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants lorsque pour toute partie finie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$p\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} p(A_i)$$

2. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Les événements $(A_i)_i$ sont mutuellement indépendant lorsque, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$ on a

$$p\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} p(A_i)$$

3. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou infinie d'événements. Les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux indépendants si pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

Remarque : Trois événements A , B et C peuvent être deux à deux indépendant, sans que A, B et C soient mutuellement indépendants.

Proposition 3.42.

Si $(A_i)_i$ est une suite d'événements mutuellement indépendants alors il en est de même pour la famille $(\overline{A_i})_i$

Chapitre 4

Variables aléatoires

4.1 Variables aléatoires réelles

Dans de nombreuses expériences aléatoires, on n'est pas intéressé directement par le résultat de l'expérience, mais par une certaine fonction de ce résultat. Considérons par exemple l'expérience qui consiste à observer, pour chacune des n pièces produites par une machine, si la pièce est défectueuse ou non. Nous attribuerons la valeur 1 à une pièce défectueuse et la valeur 0 à une pièce en bon état. L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{0, 1\}^n$. Ce qui intéresse le fabricant est la proportion de pièces défectueuses produites par la machine. Introduisons donc une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ associé le nombre $X(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{i}$ qui correspond à la proportion de pièces défectueuses associée à l'observation de ω . Une telle fonction X définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ s'appelle une variable aléatoire réelle.

Définition 1.1.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que X est une variable aléatoire si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ est un événement (i.e. $\in \mathcal{T}$).

Remarque : Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors toute une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, ...

Notations : Nous notons $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$.

L'événement $X^{-1}(\{x\})$ se note $(X = x)$,

L'événement $X^{-1}(]-\infty, a])$ se note $(X \leq a)$,

L'événement $X^{-1}([a, b])$ se note $(a < X \leq b)$

Proposition 1.2.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue alors l'application $\omega \mapsto f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est une variables aléatoire, et se note $f(X_1, \dots, X_n)$.

Remarques :

1. La somme
2. Le produit
3. L'ensembles des variables aléatoires est un
4. Min-max :

Proposition 1.3.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

1. *Si X est une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire.*
2. *Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires réelles qui converge simplement vers une application X , alors X est une variables aléatoire.*

Exemple : Si X est une variable aléatoire alors

4.2 Fonction de répartition

Définition 2.4.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = p(X \leq x)$

Exemple :

Propriétés 2.5.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ et F_X sa fonction de répartition, on a les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0, 1]$,
2. F_X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$,
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$,
4. F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}, p(X = x) = F_X(x) - \lim_{x^-} F_X$.
5. Pour tout réels a et b tels que $a \leq b$, on a $p(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Démonstration :

Proposition 2.6.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, F_X sa fonction de répartition et $x \in \mathbb{R}$. La fonction F_X est continue en x si, et seulement si, $p(X = x) = 0$.

Démonstration :

4.3 Variables aléatoires discrètes

Définition 3.7.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. On dit que X est une variable aléatoire discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Remarque : Si X est une variable aléatoire discrète, alors $X(\Omega)$ s'écrit sous la forme

Définition 3.8.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, et posons $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in I\}$ avec I est au plus dénombrable. On appelle la loi de la variable aléatoire X la famille $(p_k = p(X = x_k))_{k \in I}$

Remarque : Il est important de noter que les événements $(X = x_k)_{k \in I}$ forme un système complet d'événements et par conséquent $\sum_{k \in I} p_k = \dots\dots$

Lois usuelles :

Loi uniforme : On dit qu'une variable aléatoire X à valeur dans $\llbracket m, n \rrbracket$ suit la loi uniforme sur $\llbracket m, n \rrbracket$, notée $\mathcal{U}(\llbracket m, n \rrbracket)$ si

$$p(X = k) = \frac{1}{n - m + 1} \quad \forall k \in \llbracket m, n \rrbracket$$

Loi de Bernoulli : On dit qu'une variable aléatoire X à valeur dans $\{0, 1\}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{B}(p)$ si

$$p(X = 1) = p \quad \text{et} \quad p(X = 0) = 1 - p$$

Par exemple, cette loi intervient lorsque l'on modélise l'état de fonctionnement d'un système. La probabilité que le système fonctionne vaut p et la probabilité que le système ne fonctionne pas vaut $1 - p$. Cette loi s'applique

CHAPITRE 4 : Variables aléatoires

aussi aux jeux de hasard de type binaire comme pile ou face.

Loi binomiale : On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , notée $\mathcal{B}(n, p)$ si

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Cette loi intervient par exemple pour modéliser le nombre de pièces défectueuses dans un lot de n pièces, qui ont chacune une probabilité p d'être défectueuse, indépendamment les unes des autres.

Loi géométrique : On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit la loi géométrique de paramètre p , notée $\mathcal{G}(p)$ si

$$p(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Cette loi permet de modéliser le nombre de réalisations indépendantes d'une expérience à 2 issues (succès-échec), jusqu'à l'obtention du premier succès, si à chaque réalisation la probabilité de succès est p .

Loi de poisson : On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ si

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Cette loi intervient comme comportement limite de la loi binomiale lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $n\lambda \rightarrow p$.

Elle intervient également pour modéliser des "événements rares". Soit N la variable aléatoire comptant le nombre d'occurrences d'un événement pendant une période donnée T . On suppose qu'un seul événement arrive à la fois, que le nombre d'événement se produisant pendant T ne dépend que de la durée de cette période et que les événements sont indépendants. Si le nombre moyen d'événements (i.e. accidents) par unité de temps (i.e. semaine) est c , alors on démontre que la probabilité d'obtenir n événement pendant un temps T est :

$$P(N = n) = e^{-cT} \frac{(cT)^n}{n!}$$

4.4 Indépendance

Définition 4.9.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in I}$ une suite (finie ou infinie) de variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires X_n , $n \in I$ sont mutuellement indépendantes si pour toute famille d'intervalles $(J_n)_{n \in I}$, les événements $(X_n \in J_n)_{n \in I}$ sont mutuellement indépendants.

Les variables aléatoires X_n , $n \in I$ sont dite deux à deux indépendantes si

Remarque : Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes

Théorème 4.10.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et $1 < n_1 < \dots < n_k = n$ alors les variables aléatoires $f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}), \dots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k})$ sont indépendantes (où $f_1, \dots, f_k$ sont des fonctions)

Exemple :

Théorème 4.11.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes discrètes alors $X + Y$ est une variables aléatoires discrètes. Si $D = X(\Omega)$ et $D' = Y(\Omega)$ alors $(X + Y)(\Omega) = \dots$ et pour tout $s \in (X + Y)(\Omega)$,

$$p(X + Y = s) = \sum_{u \in D} p(X = u)p(Y = s - u) = \dots$$

Démonstration :

Exemples : $2 \times$ Poisson :
Poisson + Bernoulli :

4.5 Espérance d'une variables aléatoires

Ici, $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ désigne une espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète, puisque $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, on peut alors écrire $X(\Omega) = \{x_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ dans le cas fini, et $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ dans le cas dénombrable. Pour k entier on pose $p_k = p(X = x_k)$.

Définition 5.12.

Soit X une variable aléatoires discrète.

1. Si $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n\}$ est finie. On appelle espérance mathématique de X la moyenne pondérée notée $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n x_k p_k$$

2. Si $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$. On dit que X admet une espérance mathématique si la série numérique $\sum_{n \geq 0} x_n p(X = x_n)$ est absolument convergente. Si c'est le cas appelle espérance mathématique de X , la moyenne pondérée notée $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n p(X = x_n)$$

Exemples : Loi de Bernoulli :

Proposition 5.13.

Si Ω est au plus dénombrable et X une variable aléatoire discrète admettant une espérance mathématiques. Alors

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\{\omega\})$$

Propriétés 5.14.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrète et $a, b \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

1. Si X et Y admettent des espérances alors $aX + bY$ admet une espérance et on a $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$,
2. Si $X \geq 0$ et admet une espérance alors $E(X) \geq 0$,
3. Si $|X| \leq Y$ et Y admet une espérance alors X admet une espérance et on a $|E(X)| \leq E(Y)$,
4. Si X est constante égale à a alors X admet une espérance et on a, $E(X) = a$.

Théorème 5.15. (Théorème de transfert)

Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance mathématique si, et seulement si, la série $\sum_k f(x_k)p_k$ est absolument convergente. Dans ce cas on a

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k)p_k = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)p(X=x)$$

Remarque : L'intérêt pratique de ce résultat est le suivant : on n'a pas besoin de commencer par déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour calculer son espérance, il suffit tout simplement de transférer la loi de X .

Exemple :

Théorème 5.16.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

Si X et Y ont une espérance et sont indépendantes, alors XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Théorème 5.17. (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance mathématique et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$p(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

En particulier si X est positive alors

$$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration :

4.6 Variance, écart type et covariance

Définition 6.18.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un moment d'ordre r si la variable aléatoire X^r admet une espérance mathématique. Si c'est le cas le moment d'ordre r de X est $\mu_r(X) := E(X^r)$.

Proposition 6.19.

Si une variable aléatoire X admet un moment d'ordre r . Si $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, alors X admet un moment ordre k .
Si $X(\Omega)$ est fini alors X admet des moments à tous les ordres $r \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Le cas infini

Définition 6.20.

On dit que X admet une variance si la variable aléatoire $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2. On appelle variance de X la valeur $V(X) = E((X - E(X))^2)$. On appelle l'écart type de X la valeur $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème 6.21.

1. X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance mathématique.
2. **Formule de Huygens** : Si X admet une variance alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration :

Propriétés 6.22.

Soit X une variable aléatoire admettant une variance et $a, b \in \mathbb{R}$ alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Démonstration :

Vocabulaires :

1. Si $E(X) = 0$, on dit que X est une variable aléatoire centrée,
2. Si $V(X) = 1$, on dit que X est une variable aléatoire réduite,
3. Si X admet une variance non nulle, la variable $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est dite centrée et réduite associée à X .

Théorème 6.23. (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration :

Définition 6.24.

Soit X et Y deux variables aléatoires ayant une variance. La covariance de X et Y de réels défini par

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarque : Si X et Y sont deux variables aléatoires ayant une variance alors

$$\text{Cov}(X, X) = V(X) \quad \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

Propriétés 6.25.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes ayant une variance.

1. **Formule de Huygens :** $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Si X et Y sont indépendantes alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

2. $X + Y$ admet une variance et

$$V(X + Y) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$$

Si de plus X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

3. Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille finie de variables aléatoires deux à deux indépendantes qui admettent une variance, alors $\sum_{i \in I} X_i$ admet une variance et on a

$$V\left(\sum_{i \in I} X_i\right) = \sum_{i \in I} V(X_i)$$

4.7 Vecteurs aléatoires

Définition 7.26.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. L'application $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $Z(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est appelé vecteur aléatoire, notée $(X_1, \dots, X_n)$.

On appelle la loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ la famille

$$(p((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)))_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)}$$

Remarque : Cas de $n = 2$: Si X et Y sont des variables aléatoires, le vecteur (X, Y) est appelé couple de variables aléatoires et la loi du couple (X, Y) est donnée par $(p((X = x) \cap (Y = y)))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ appelé loi conjointe.

La fonction de répartition : Soit $Z = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire, la fonction de répartition de Z est la fonction $F_Z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F_Z(x_1, \dots, x_n) = p((X_1 \leq x_1) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n))$$

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$F_Z(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)$$

Théorème 7.27.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Alors

1. Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$; $p(X = x, Y = y) \geq 0$,
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $p(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} p(X = x, Y = y)$,
3. Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a $p(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} p(X = x, Y = y)$,
4. $\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} p(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} p(X = x, Y = y) = 1$

Démonstration :

Définition 7.28.

Les variables aléatoires X et Y sont appelés les variables marginales du couple (X, Y) . Les lois des variables aléatoires X et Y , sont appelées les lois marginales du couple (X, Y) .

Exemple :

Proposition 7.29.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. alors, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $p(X = x, Y = y) = p(X = x)p(Y = y)$.

Proposition 7.30.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors la variable aléatoire $g(X, Y)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $(xyp(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y)p(X = x, Y = y)$$

Corollaire 7.31.

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. Si X et Y admettent des variances, alors XY admet une espérance et on a

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyp(X = x, Y = y)$$

4.8 Fonction génératrice

Définition 8.32.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction :

$$G_X : t \mapsto E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)t^k$$

Remarque :

1. La fonction G_X est la somme de la série entière $\sum_k p(X = k)t^k$.
2. $G_X(1) = 1$.

4.9 Fonction génératrice d'une somme

3. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_k p(X=k)t^k$ est au moins égale à 1.

Propriétés 8.33.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. La fonction G_X est définie au moins sur $[-1, 1]$.
2. La fonction G_X est continue au moins sur $[-1, 1]$.
3. La fonction G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au moins sur $] -1, 1[$.

Démonstration :

Remarque : Si X est finie alors

Proposition 8.34.

Soit X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors $G_X = G_Y$ si, et seulement si, X et Y ont même loi.

Démonstration :

Fonction génératrices pour les lois usuelles :

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$:

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$:

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$:

4.9 Fonction génératrice d'une somme

Théorème 9.35.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Démonstration :

Corollaire 9.36.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$G_{X_1 + \dots + X_n} = G_{X_1} \dots G_{X_n}.$$

Démonstration : Par récurrence sur $n \geq 1$:

Proposition 9.37.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Alors S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration :

4.10 Espérance et variance

Théorème 10.38.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1, auquel cas $E(X) = G'_X(1)$.
2. X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X admet une dérivée seconde en 1, auquel cas $E(X^2) = G''_X(1) + E(X)$.

Chapitre 5

Espaces préhilbertiens (PCSI)

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

5.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel

5.1.1 Définition et exemples

Définition 1.1.

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x, x', y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x', y)$ (linéarité par rapport à la première variable).
2. $\forall x, y, y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(x, y + \lambda y') = \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, y')$ (linéarité par rapport à la deuxième variable).
3. $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie).
4. $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$ (positivité).
5. $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ (définie).

Notation : Si φ est un produit scalaire sur E , le réel $\varphi(x, y)$ se note souvent par :

$$(x|y) \text{ ou } x.y \text{ ou } \langle x, y \rangle$$

5.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel

Remarque : Si φ est une forme symétrique, alors φ est linéaire par rapport à la première variable si, et seulement si, elle est linéaire par rapport à la deuxième variable.

Exemples :

1. L'application $(\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ par $(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique.
2. L'application $(A, B) \mapsto (A|B) = \text{tr}(^t AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_a^b f g$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
4. L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f g$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$.
5. L'application $(X, Y) \mapsto ^t XY$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ appelé produit scalaire canonique.

Des produits scalaires usuels

Définition 1.2.

1. Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
2. Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

Proposition 1.3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Avec égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

5.1.2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 1.4.

Soit E un espace préhilbertien, pour $x \in E$ le réel $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ s'appelle la norme de x et se note $\|x\|$, ainsi $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Proposition 1.5.

1. Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$
2. Pour tout $x \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. Pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire).

Remarque : Soit $x, y \in E$, alors $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Définition 1.6.

L'application $x \mapsto \|x\|$ est appelée la norme associée au produit scalaire $\langle, \rangle$.

Remarque : Inégalité triangulaire renversé : pour tous $x, y \in E$, on a

$$||x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Cette inégalité entraîne la continuité de la norme

Proposition 1.7.

Soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire sur E . L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Ainsi d définit une distance sur E .

Proposition 1.8.

Soit E un espace préhilbertien.

1. $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme).
2. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ (identité de polarisation).

Remarque : L'identité de polarisation permet d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme.

5.2 Orthogonalité

5.2.1 Vecteurs et sous espaces orthogonaux

Définition 2.9.

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. On dit que les deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.
2. On dit que x est orthogonale à une partie A de E si pour tout $a \in A$, $\langle x, a \rangle = 0$. On note $x \perp A$.
3. On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_i$ est orthogonale si pour tous i, j avec $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.
4. On dit que deux parties A et B sont orthogonales si pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, $\langle x, y \rangle = 0$. On note $A \perp B$.
5. On appelle l'orthogonal d'une partie A , l'ensemble $A^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$.

Exemple : $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - 2y + z - 3t = 0\}$ alors $(1, -2, 1, -3) \in F^\perp$.

CHAPITRE 5 : Espaces préhilbertiens (PCSI)

Proposition 2.10.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, A et B deux parties de E

1. $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E .
2. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$
3. Si $A \subseteq B$ alors $B^\perp \subseteq A^\perp$
4. $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Corollaire 2.11.

Soit E un espace préhilbertien et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ un sous espace vectoriel de E . Soit $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $x \in F^\perp$
2. Pour tout $1 \leq i \leq p$, $\langle x, e_i \rangle = 0$.

Un vecteur est orthogonal à F s'il est orthogonal à une famille génératrice de F

Proposition 2.12.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E .

1. La somme $F + F^\perp$ est directe, c'est-à-dire $F \cap F^\perp = \{0\}$.
2. $F \subseteq F^{\perp\perp}$.

Définition 2.13.

Un vecteur $x \in E$ est dit unitaire ou normé si $\|x\| = 1$

Remarque : Si $x \in E \setminus \{0\}$, alors les deux vecteurs $\pm \frac{x}{\|x\|}$ sont unitaires.

Définition 2.14.

On dit qu'une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ est orthonormée si pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

$$\text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique est une famille orthonormée.

Définition 2.15.

Une base orthonormée est une famille qui est à la fois base et orthonormée.

Exemple : La base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ est une base orthonormale de E muni du produit scalaire canonique.

Proposition 2.16.

1. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille orthogonale, formée de vecteurs non nuls, alors elle est libre.
2. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille orthonormée, alors elle est libre.

Théorème 2.17. (Théorème de Pythagore)

1. Soient $x, y \in E$, alors $x \perp y$ si, et seulement si, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
2. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

5.2.2 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Théorème 2.18.

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de E . Alors il existe une famille orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que
Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.

CHAPITRE 5 : Espaces préhilbertiens (PCSI)

Procédé d'orthonormalisation : Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de E , et posons : $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ normalisation du vecteur v_1 , et pour $k > 1$,

$$e_k = \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k | e_i) e_i}{\|v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k | e_i) e_i\|}$$

Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale et, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.

Remarque : L'algorithme précédent fournit une méthode pour construire des bases orthonormales à partir d'une base quelconque.

Exemple : Orthonormaliser la famille suivante $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}[X]$, pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Théorème 2.19.

Tout espace euclidien non nul admet au moins une base orthonormale.

Proposition 2.20.

Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E .

Théorème 2.21.

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E ,

1. *Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k$.*
2. *Pour tout $x, y \in E$, $(x | y) = \sum_{k=1}^n (x | e_k)(y | e_k)$.*
3. *Pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x | e_k)^2$.*

Les coordonnées d'un vecteur et l'expression du produit scalaire dans une b.o.n de E

5.2.3 Projecteur orthogonal

Proposition 2.22.

Soit E un espace préhilbertien et F un sous espace vectoriel de E de dimension finie, $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F .

Pour tout $x \in E$, $x - \sum_{k=1}^p (x|e_k)e_k \in F^\perp$,

Proposition 2.23.

Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E , alors

$$E = F \oplus F^\perp$$

Si E est de dimension finie, alors $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ c'est-à-dire $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Définition 2.24.

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E . La projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée projection orthogonale sur F .

La symétrie s_F par rapport à F parallèlement à $F^\perp$ est appelée la symétrie orthogonale par rapport à F .

Théorème 2.25.

Soit E un espace préhilbertien et F un sous espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F .

$$1. \text{ Pour tout } x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^p (x|e_k)e_k.$$

$$2. \text{ Pour tout } x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\| \text{ (inégalité de Bessel).}$$

Expression de la projection orthogonale dans une b.o.n de F

Définition 2.26.

Soit F un sous espace vectoriel de E . On appelle distance de x à F , le réel défini par

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

En effet l'ensemble $\{\|x - y\| / y \in F\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée donc admet une borne inférieure

Théorème 2.27.

Soit F un sous espace vectoriel de E et $x \in E$, on a

1. $\forall y \in F, \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$
2. $\forall y \in F, \|x - p_F(x)\| = \|x - y\|$ si, et seulement si, $y = p_F(x)$

Corollaire 2.28.

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$, alors

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

5.3 Suite orthonormale

Définition 3.29.

Soit E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale si pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$.

Exemple : Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note e_n la fonction définie par $e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $e_n(t) = \cos(nt)$ pour $n \geq 1$. La suite $(e_n)_n$ est orthonormale.

Proposition 3.30.

Soit E un espace préhilbertien, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale et $x \in E$. Alors la série $\sum_n \langle x, e_n \rangle^2$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Inégalité de Bessel

Démonstration :

WWW . aqalmoun
Mohamed Aqalmoun

Chapitre 6

Endomorphismes dans les espaces euclidiens

6.1 Formes linéaires sur un espace euclidien

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, une forme linéaire sur E est une application linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ (une application linéaire de E et à valeurs dans $\mathbb{K}$).
Soit E un espace euclidien et $y \in E$, l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire sur E .

Théorème 1.1. (théorème de Riez)

Soit E un espace euclidien f une forme linéaire sur E , alors il existe un unique $y \in E$ tel que, pour tout $x \in E$

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

Démonstration :

6.2 Matrices orthogonales

Définition 2.2.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tAA = I_n$, c'est-à-dire A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. L'ensemble des matrices orthogonales

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exemples :

Proposition 2.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,
2. Les vecteurs colonnes de A forme une base orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
3. Les vecteurs lignes de A forme une base orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

Démonstration :

Proposition 2.4.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\text{Gl}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire

1. $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration :

Proposition 2.5.

Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\det A = \pm 1$.

Démonstration :

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Si $\det(A) = 1$ on dit que A est une matrice orthogonale positive ou directe, dans le cas contraire on dit qu'elle est négative ou indirecte.

Exemple :

CHAPITRE 6 : Endomorphismes dans les espaces euclidiens

Définition 2.6.

L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \det A = 1\}$ appelé groupe spécial orthogonal.

Proposition 2.7.

Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\text{Sp}(A) \subseteq \{-1, 1\}$.

Démonstration :

Proposition 2.8.

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E . La matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale.

Démonstration :

Remarque : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales de E , alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = \dots\dots\dots$

Si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$, alors

Définition 2.9.

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E . On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

Remarque : Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E . Alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation si, et seulement si, ...

Définition 2.10. (Orientation)

Soit E un espace euclidien. Orienter l'espace E c'est choisir une base orthonormale (de référence) $\mathcal{B}$. Une base $\mathcal{B}'$ est dite directe si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$, et elle est dite indirecte dans le cas contraire.

Remarque : Soit E un espace euclidien orienté (par $\mathcal{B}$), alors $\mathcal{B}$ est

Théorème 2.11.

Soit E un espace euclidien orienté, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes. Alors pour tous $v_1, \dots, v_n \in E$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n)$$

Démonstration :

6.3 Isométrie vectorielle

Définition 3.12.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un endomorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle si pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

On notera $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E .

Exemples : Soit E un espace euclidien.

1. L'endomorphisme Id_E est une isométrie vectorielle.
2. Soit F un sous espace vectorielle de E et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F , alors s_F est une isométrie vectorielle

Proposition 3.13.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalents :

1. u endomorphisme orthogonal de E ,
2. Pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Démonstration :

CHAPITRE 6 : Endomorphismes dans les espaces euclidiens

Proposition 3.14.

Soit E un espace euclidien. Si u est un endomorphisme orthogonal alors u est un automorphisme. Autrement dit $\mathcal{O}(E) \subseteq \text{Gl}(E)$.

Démonstration :

Théorème 3.15.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u \in \mathcal{O}(E)$,
2. u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E ,
3. u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale de E .

Démonstration :

Théorème 3.16.

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est un endomorphisme orthogonal si, et seulement si, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration :

Proposition 3.17.

Soit E un espace euclidien. Alors $\mathcal{O}(E)$ est un sous groupe de $\text{Gl}(E)$.

Démonstration :

Proposition 3.18.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Démonstration :

Définition 3.19.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. On dit que u est une isométrie directe ou positive (ou rotation) si $\det(u) = 1$.
2. On dit que u est une isométrie indirecte ou négative si $\det(u) = -1$.
3. L'ensemble $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) / \det u = 1\}$ est un sous groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal ou groupe des rotations vectorielles de E .

Remarque :

1. $\text{Id}_E \in \mathcal{SO}(E)$.
2. Si $u, v \in \mathcal{SO}(E)$, alors $uv \in \mathcal{SO}(E)$.
3. Si $u \in \mathcal{SO}(E)$, alors $u^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$.

Définition 3.20.

Soit E un espace euclidien. Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E .

Remarque : u réflexion

Proposition 3.21.

Soit E un espace euclidien et u une réflexion de E . Alors $\det(u) = -1$.

Démonstration :

Proposition 3.22.

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal de E . Si F est un sous espace vectoriel de E et stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

CHAPITRE 6 : Endomorphismes dans les espaces euclidiens

Démonstration :

6.3.1 Groupe orthogonal en dimension 2 et 3

Groupe orthogonal en dimension 2 :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Proposition 3.23.

1. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, R_θ est inversible et $R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = {}^t R_\theta$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration :

Théorème 3.24.

$$\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta / \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration :

Corollaire 3.25.

Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif i.e pour tous $A, B \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, $AB = BA$.

Démonstration :

Proposition 3.26.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2, $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et $u \in \mathcal{SO}(E)$. Alors il existe un réel θ unique modulo 2π tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.

Démonstration :

Théorème 3.27.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2, et $u \in \mathcal{SO}(E)$. Alors il existe un réel θ unique modulo 2π tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = R_{\theta}$. On dit que θ est une mesure d'angle de la rotation u .

Démonstration :

Groupe orthogonal en dimension 3 :

Dans ce paragraphe E est un espace euclidien de dimension 3.

Proposition 3.28.

Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.

1. 1 est une valeur propre de u ,
2. Si $u \neq \text{Id}_E$, alors le sous espace propre de u associé à la valeur propre 1 est une droite vectorielle.

Démonstration :

Proposition 3.29.

Soit $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

1. 1 est une valeur propre de A .
2. Si $A \neq I_3$, alors le sous espace propre de A associé à la valeur propre 1 est une droite vectorielle.

Démonstration : C'est la version matricielle du résultat précédent.

Théorème 3.30.

Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\theta \in \mathbb{R}$, tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On dit que θ est une mesure d'angle de la rotation u .

Démonstration : Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$. Si $u = \text{Id}_E$, dans ce cas $\theta = 0$.
Supposons que $u \neq \text{Id}_E$. Dans ce cas $\dim E_1(u) = 1$. Soit $F = E_1(u)^\perp$ c'est un plan vectoriel.

6.4 Endomorphismes autoadjoints

Définition 4.31.

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . On dit que u est un endomorphisme autoadjoint (ou endomorphisme symétrique), si pour tout $x, y \in E$

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E se note $\mathcal{S}(E)$.

Exemple : l'endomorphisme Id_E est autoadjoint.

Remarque : $\mathcal{S}(E)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 4.32.

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E . Si F est un sous espace vectoriel de E et stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Démonstration :

Proposition 4.33.

Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme de E , $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors u est un endomorphisme autoadjoint si, et seulement si, la matrice A est symétrique.

Démonstration :

Proposition 4.34. (projecteurs orthogonaux)

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E . Alors p est un endomorphisme autoadjoint si, et seulement si, p est une projection orthogonale (i.e $\text{Im } p = (\ker p)^\perp$).

Proposition 4.35.

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Les sous espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire $(E_\lambda(u) \perp E_{\lambda'}(u) \text{ si } \lambda \neq \lambda')$.

Démonstration : Soit u un endomorphisme symétrique et λ, λ' deux valeurs propres distinctes de u . Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_{\lambda'}(u)$.

Démonstration :

Théorème 4.36. (Théorème spectral)

Soit E un espace euclidien. Tout endomorphisme symétrique u de E est diagonalisable dans une base orthonormale de E . En d'autres termes il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u .

Démonstration : Admis.

Remarque : Si u est autoadjoint alors son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u .

Théorème 4.37. (Théorème spectral version matricielle)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que

$$A = PDP^{-1} = PA^tP$$

CHAPITRE 6 : Endomorphismes dans les espaces euclidiens

On dit alors que A est orthogonalement diagonalisable.

Démonstration : On muni $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et notons que c'est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$

Définition 4.38.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.

1. On dit que u est positif si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle \geq 0$.
2. On dit que u est défini positif si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x), x \rangle > 0$.

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. défini positifs) se note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$).

Remarque : Un endomorphisme autoadjoint u est défini positif si

Théorème 4.39.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ (un endomorphisme autoadjoint).

1. u est positif si, et seulement si, toutes les valeurs propres de u sont positives ($\text{Sp}(u) \subseteq \mathbb{R}_+$).
2. u est défini positif si, et seulement si, toutes les valeurs propres de u sont strictement positives ($\text{Sp}(u) \subseteq \mathbb{R}_+^*$).

Notation : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées, réelles symétrique (d'ordre n).

Définition 4.40.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique.

1. On dit A est positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X A X \geq 0$.
2. On dit A est définie positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$${}^tXAX > 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définie positives) se note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Remarque : Une matrice symétrique A est définie positive

Théorème 4.41.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique.

1. A est positive si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont positives ($\text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}_+$).
2. A est définie positive si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont strictement positives ($\text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}_+^*$).

Démonstration :

Chapitre 7

Variable aléatoire à densité

7.1 Loi à densité

Définition 1.1.

Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie par :

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

Proposition 1.2.

Soit X une variable aléatoire, et F_X sa fonction de répartition.

1. F_X est croissante,
2. F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et $\lim_{x^-} F_X = F_X(x) - p(X = x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Remarque : La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle : la connaissance de F_X permet de calculer $p(X \in I)$ pour tout intervalle I .

La continuité de F_X en un point x est équivalent à $p(X = x) = 0$

Définition 1.3.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est à densité, si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un sous ensemble fini F (éventuellement vide).

On appelle densité de X la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = F'_X(x)$ si $x \in \mathbb{R} \setminus F$ et $f_X(x) = 0$ si $x \in F$.

Exemple : Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X . Déterminer une densité de $Y = X^2$:

Proposition 1.4.

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X .

1. f_X est positive continue sur $\mathbb{R} \setminus F$,
2. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ converge et vaut 1.
3. Pour tout intervalle I de borne supérieure b et inférieure a ,

$$p(X \in I) = \int_a^b f_X(t)dt.$$

Démonstration :

Remarque : Si X admet une densité, et $a \in \mathbb{R}$, alors la probabilité qu'elle prenne la valeur a est nulle, puisque

$$p(X = a) = p(X \in [a, a]) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Remarque : la fonction de répartition permet de calculer la probabilité de tomber dans n'importe quel intervalle, par exemple

$$p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X < a) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = \int_{-\infty}^b f(t)dt - \int_{-\infty}^a f(t)dt = F(b) - F(a).$$

7.2 Espérance et moments

Définition 2.5.

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X . On dit que X admet une espérance si la fonction $t \mapsto tf_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, si c'est le cas l'espérance de X est le réel noté $E(X)$ est défini par :

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire de densité $1_{[0,1]}$.

Théorème 2.6. (de transfert)

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X , et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la fonction $t \mapsto \varphi(t)f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et dans ce cas on a

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f_X(t)dt$$

Remarque : Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X . Alors la variable aléatoire X^2 admet une espérance si, et seulement si, la fonction $t \mapsto t^2f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Si c'est le cas on a, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f_X(t)dt$.

Propriétés 2.7.

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité.

1. Si X et Y admettent des espérances et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $aX + bY$ admet une espérance et on a : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
2. Si $|X| \leq Y$, et Y admet une espérance alors X admet une espérance et on a : $|E(X)| \leq E(Y)$.

Remarque : Si X est positive admet une espérance alors $E(X) \geq 0$.

Définition 2.8. (moment d'ordre k)

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X , et $k \in \mathbb{N}^*$

1. On dit que X admet un moment d'ordre k si la fonction $t \mapsto t^k f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, le moment d'ordre k de X est le réel :

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_X(t) dt$$

2. Le moment centré d'ordre k de X est le réel :

$$E((X - E(X))^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^k f_X(t) dt$$

Théorème 2.9.

Soit X une variable aléatoire à densité. Si X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors elle admet des moments de tout ordre $j \in \{1, \dots, k\}$.

Démonstration :

Remarque : Si X admet un moment d'ordre 2 alors X

Définition 2.10. (Variance et écart-type)

Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que X admet une variance si $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas la variance de X est le réel

$$\text{Var}(X) := E((X - E(X))^2)$$

On appelle l'écart-type de X le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Proposition 2.11.

Soit X une variable aléatoire à densité. Alors X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance.

Proposition 2.12.

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X , et admettant une variance .

1. $V(X) \geq 0$.
2. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Formule König-Huyghens).
3. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Théorème 2.13. (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire à densité, admettant une espérance, alors

$$\forall \delta > 0, \quad p(|X| \geq \delta) \leq \frac{E(|X|)}{\delta}$$

Théorème 2.14. (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire à densité, admettant une variance, alors

$$\forall \delta > 0, \quad p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\delta^2}$$

7.3 Lois usuelles

7.3.1 Loi uniforme

Définition 3.15.

Soient a, b deux réels avec $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, et on note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$ si X admet pour densité la fonction $\frac{1}{b-a} \chi_{[a,b]}$. Où χ_A désigne, pour une partie A , la fonction caractéristique de A , i.e $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$

et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Proposition 3.16. (Fonction de répartition)

Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors sa fonction de répartition F est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

Démonstration :

Proposition 3.17.

Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration :

7.3.2 Loi exponentielle

Définition 3.18.

Soient λ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si X admet pour densité la fonction

$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \chi_{[0,+\infty[}(x)$$

Proposition 3.19. (Fonction de répartition)

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition F est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration :

Proposition 3.20.

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration :

7.3.3 Loi normale

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$

Définition 3.21.

Soient m, σ deux réels avec $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale ou gaussienne, de paramètre m et σ^2 , et on note $X \sim \mathcal{N}(m; \sigma^2)$ si X admet pour densité la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit une loi normale centrée et réduite.

Remarque : Fonction de répartition : Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors sa fonction de répartition F est :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt$$

Proposition 3.22.

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Démonstration :

Proposition 3.23.

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

Démonstration :

7.3.4 Loi gamma

Définition 3.24.

Soient α, λ deux réels strictement positifs. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma, de paramètre (α, λ) , et on note $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$ si X admet pour densité la fonction

$$x \mapsto \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \chi_{[0, +\infty[}(x)$$

$$\text{Où } \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Remarque : Fonction de répartition, Si $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$, alors sa fonction de répartition F est :

$$F(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$$

Proposition 3.25.

Si $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$, alors

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

7.4 Couple de variables aléatoires

7.4.1 Loi de la somme

Théorème 4.26.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à densités, de densités respectivement f_1 et f_2 . Alors la variable aléatoire $Y := X_1 + X_2$ est à densité, et admet pour densité la fonction

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt$$

La fonction f s'appelle le produit de convolution des deux fonctions f_1 et f_2 et se note $f = f_1 * f_2$.

Exemple :

7.4.2 Covariance et corrélation

Définition 4.27.

Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires. la covariance de X_1 et X_2 le réel

$$\text{Cov}(X_1, X_2) := E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)))$$

Proposition 4.28.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires, alors

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

Si X_1 et X_2 sont indépendantes alors $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

Remarque : Sous réserve d'existence, $V(X + Y) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$, si de plus X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Proposition 4.29.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et admettant des variances, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

7.5 Théorèmes limites**Définition 5.30.**

Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoires, et X une variable aléatoire. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Théorème 5.31. (Loi faible des grandes nombres)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables indépendantes, de même espérance λ et de même variance σ . La variable aléatoire $S_n^* = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers λ i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p(|S_n^* - \lambda| \geq \varepsilon) = 0$$

Démonstration :

Définition 5.32.

Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoires, et X une variable aléatoire. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F la fonction de répartition de X . On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour tout point x de $\mathbb{R}$ où F est continue on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$$

Théorème 5.33. (Admis)

Si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X , alors $(X_n)_n$ converge en loi vers X . La réciproque est fausse en général.

Théorème 5.34. (Théorème de la limite centrée)

Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moments d'ordre 2, alors la suite $\left(Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu)\right)_n$, où $\mu = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi Gaussienne standard. i.e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

où G_n est la fonction de répartition de Z_n .